2) Laurent's Series :-

* في كثير من التطبيقات يكون من الضروري إيجاد مفكوك للدالة $f(Z)$ حول نقط تكون عندها $f(Z)$ ليست "analytic" (أي أن تلك النقط تكون singular وبالتالي فإن $f(Z) = \infty$ عند هذه النقط)

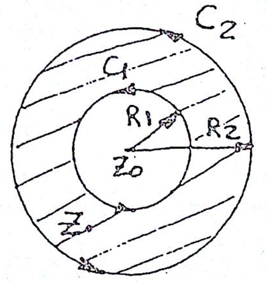
* في هذه الحالة لا يمكن إستخدام مفكوك Taylor لأنه لا يمكن إيجاده إلا حول regular (ordinary) point (نقطة تكون عندها الدالة $f(z)$ analytic أي تكون عندها $f(Z) \neq \infty$) وبالتالي فإننا نلجأ إلى إستخدام نوع آخر من المتواليات يسمى بـ Laurent's series حيث يمكن بها إيجاد المفكوك المطلوب للدالة $f(Z)$ حول النقطة "Z_0" (سواء كانت singular point أو كانت regular point).

* Laurent's theorem :-

* إذا كانت الدالة $f(Z)$ analytic في المنطقة الحلقية annular region المعرفة بالصورة :-

$$R_1 < |Z - Z_0| < R_2$$

حيث تكون محددة بدائرتين C_1 و C_2 مشتركتين في المركز "Z_0" الدائرة الداخلية "C_1" نصف قطرها "R_1" والخارجية "C_2" نصف قطرها "R_2" (كما هو موضح في الشكل المقابل)



* فإنه يمكن كتابة مفكوك للدالة $f(Z)$ حول النقطة "Z_0" (Lauren's series) في الصورة الآتية :-

$$\boxed{\begin{aligned} f(Z) = a_0 + a_1(Z-Z_0) + a_2(Z-Z_0)^2 + a_3(Z-Z_0)^3 + \cdots \\ + b_1(Z-Z_0)^{-1} + b_2(Z-Z_0)^{-2} + \cdots \end{aligned}}$$

→ Laurent's series

حيث تكون "Z" عبارة عن أى نقطة تقع داخل المنطقة الحلقية المحصورة بين C_1 و C_2 .

* يسمى الجزء الأول من المتوالية السابقة الذى يحتوى على الحدود ذات الأسس الموجبة :

$$\to a_0 + a_1(Z-Z_0) + a_2(Z-Z_0)^2 + \cdots\cdots$$

بـ الـ " analytic part "

* بينما يسمى الجزء الباقى من المتوالية السابقة الذى يحتوى على الحدود ذات الأسس السالبة :

$$\to b_1(Z-Z_0)^{-1} + b_2(Z-Z_0)^{-2} + \cdots\cdots$$

بـ الـ " principal part "

* مما سبق نجد أنه لو كان الـ " principal part " فى "Laurent's series" يساوى صفر فإن المفكوك السابق يؤول إلى "Taylor series"

* وهذا يعنى أن "Laurent's series" تختلف عن "Taylor series" فى أنها تحتوى على حدود ذات أسس سالبة

* كما أنه يوجد إختلاف هام جداً بين الإثنين (سبق ذكره ضمنياً من قبل) وهو أن مفكوك Taylor يمكن إيجاده فقط حول regular (ordinary) point (تكون عندها $f(Z)$ analytic أى $f(Z) \neq \infty$ عند هذه النقطة)
بينما يمكن إيجاد مفكوك Laurent حول أى نقطة سواء كانت "singular point" (تكون عندها $f(Z) = \infty$) أو "regular point" (تكون عندها $f(Z) \neq \infty$)

* هذا بالإضافة إلى أن فترة التقارب فى حالة "Taylor series" تكون عبارة عن دائرة مركزها نقطة Z_0 (النقطة المراد إيجاد المفكوك حولها (ليست sing. point)) ونصف قطرها "r" (المسافة بين Z_0 وأقرب sing. point للدالة $f(Z)$ مثلاً) بينما تكون فترة التقارب فى حالة Laurent series عبارة عن منطقة حلقية مركزها النقطة Z_0 (تكون فى الغالب sing. point) ونصف قطرها الداخلى "R_1" (المسافة بين Z_0 وأقرب sing. point لـ $f(Z)$ مثلاً) والخارجى "R_2" (المسافة بين Z_0 والـ sing. point التى تليها التالية)

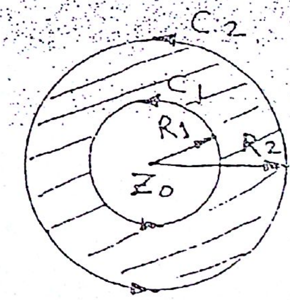
Methods of expansion in Laurent's series :-

* توجد عدة طرق لإيجاد Laurent's series ولكن يجب قبل استخدام أي طريقة من تلك الطرق أن نقوم بعمل الآتي :-

① نحدد أولاً الـ singular points للدالة $f(Z)$ المطلوب إيجاد المفكوك لها (قيم Z التي تجعل الدالة $f(Z)$ تساوي ∞).

② نوجد المسافة بين النقطة "Z_0" (المطلوب إيجاد المفكوك حولها) وبين أقرب singular point فتكون هي "R_1" ثم نوجد المسافة بين Z_0 والـ singular point التالية (بعد الـ singular point السابقة) في القرب بالنسبة لـ "Z_0" فتكون هي "R_2". ومنها تكون منطقة التقارب للمتوالية المطلوبة domain (region) of convergence ← في الصورة الآتية :

$$R_1 < |Z - Z_0| < R_2$$



والتي تمثل المنطقة الحلقية المحصورة بين الدائرتين C_1, C_2 حيث يكون نصف القطر الداخلي لها هو R_1 ونصف القطر الخارجي لها هو R_2 (كما هو موضح في الشكل المقابل بالمنطقة المهشرة)

ملحوظة :- * إذا كانت النقطة "Z_0" (المطلوب إيجاد المفكوك حولها) عبارة عن singular point فإن $R_1 = 0$ (وذلك لأن أقرب singular point لـ Z_0 هي Z_0 نفسها في هذه الحالة). وبالتالي فإن الـ "domain of convergence" في هذه الحالة يكون في الصورة :

$$0 < |Z - Z_0| < R_2$$

(والممثلة بالمنطقة المهشرة الموجودة داخل الدائرة ذات نصف القطر R_2)

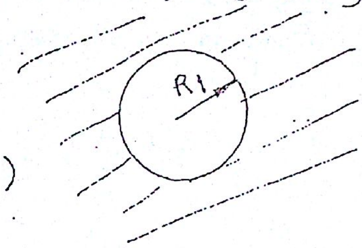
حيث يسمى في هذه الحالة بـ "a deleted neighborhood of the point Z_0"

* وإذا كان للدالة $f(Z)$ singular point واحدة فقط (ليست Z_0) فإن R_2 في هذه الحالة تساوي ∞ ...

وبالتالي فإن الـ "domain of Convergence" يكون في هذه الحالة في الصورة :

$$R_1 < |z - z_0| < \infty$$

(والممثلة بالمنطقة المهشرة الموجودة خارج الدائرة ذات نصف القطر R_1)



* ومن الطرق المستخدمة لإيجاد Laurent's series :-

① By using Binomial theorem :-

* تستخدم هذه الطريقة عندما تكون الدالة $f(z)$ (المراد إيجاد مفكوك Laurent الخاص بها) في صورة كسر بسطه ومقامه عبارة عن كثيرة حدود من polynomial في z .

• نوجد أولاً الكسور الجزئية المكافئة للدالة $f(z)$:-

• نعيد تشكيل مقام كل كسر منها بحيث نضمن أنه لابد وضعه في الصورة

دالة في $(z-z_0)$

$$\left[1 \pm \phi(z-z_0)\right]^n$$

يمكن رفعه إلى البسط وفكه بنظرية ذات الحدين حيث لابد أن يتوافر شرط صحة مفكوك نظرية ذات الحدين من $|\phi(z-z_0)| < 1$ في الفترة (أو المنطقة) التي نوجد فيها المفكوك. (كما سيظهر فيما بعد في الأمثلة القادمة).

ملحوظة هامة :- إذا كان واحد (أو أكثر) من تلك الكسور مكتوب على الصورة :-

$$\frac{1}{(z-z_0)^n}$$

فإننا نتركه كما هو ونحاول أن نكتب الكسور الأخرى (بعد إعادة تشكيلها بالصورة التي سبق ذكرها من قبل) حتى يمكن الحصول على المفكوك المطلوب.

2) By using Taylor's method :-

* إذا كان من الممكن أن نضع الدالة $f(z)$ (المطلوب إيجاد المفكوك المكانى لها) فى الصورة :-

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z-z_0)^n}$$

حيث $\phi(z)$ دالة analytic عند $z = z_0$ أى $\phi(z_0) \neq \infty$ أى

* فإنه يمكن أن نوجد "Taylor's series" حول النقطة $z = z_0$ للدالة $\phi(z)$ (كما سبق شرح ذلك من قبل) ثم نقسم المتوالية الناتجة حداً حداً على المقام $(z-z_0)^n$ نحصل على Laurent's series المطلوبة

ملاحظات هامة :- ① إذا كان المطلوب فى المسألة هو إيجاد all possible Laurent exponsion of a function $f(z)$

فإن هذا يعنى أنه لابد من إيجاد مفكوك Laurent فى المناطق المختلفة التى يمكن الحصول عليها برسم دوائر مركزها النقطة z_0 (المراد إيجاد المفكوك حولها) وتمر كل منها (تقريبا) بـ sing. point للدالة $f(z)$ فتكون الـ domoins of Convergence فى هذه الحالة عبارة عن معادلات المناطق الحلقية التى يمكن إيجاد مفكوك Laurent فيها.

② إذا لم يعطى نقطة "z_0" لكى نوجد المفكوك حولها فإن هذا يعنى أن المطلوب إيجاد مفكوك Laurent حول جميع الـ sing. points للدالة $f(z)$

③ إذا كان المطلوب هو إيجاد مفكوك Laurent in the region deleted to the point z_0

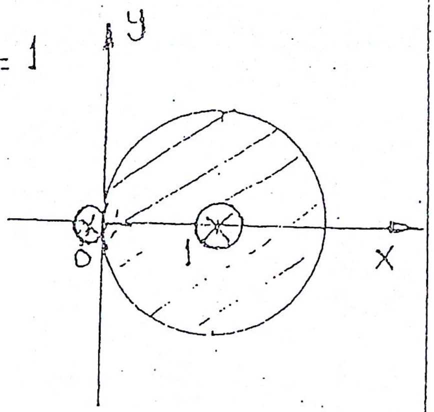
فإن هذا يعنى أن $R_1 = 0$ وبالتالى فإن منطقة التقارب تكون

$$0 < |z - z_0| < R_2$$

Ex (41) Expand $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$ as Laurent's series in powers of $(z-1)$ in the region deleted to the point $z=1$.

Solution:– $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$

has singular points at $z=0, z=1$
$\left(\text{لأن } f(0), f(1) = \infty\right)$



* حيث أن المطلوب هو إيجاد Laurent's series بدلالة قوى $(z-1)$ فإن هذا يعني أن النقطة المراد إيجاد المفكوك حولها هي $z_0 = 1$

* وحيث أن المفكوك مطلوب في منطقة deleted to $z_0 = 1$ فإن هذا يعني أن $R_1 = 0$ وبالتالي فإن الـ region of convergence يكون:

$$0 < |z-1| < 1$$

المسافة بين $z_0 = 1$ (النقطة التي نوجد حولها المفكوك وهي هذه الحالة sing. point) و $z = 0$ ← الـ sing. point التالية

(وهي المنطقة الممثلة بالمساحة المهشرة المبينة في الشكل).

* $\because f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$

$$= \underbrace{\frac{1}{(z-1)}}_{\text{هذا المقدار موجود على الصورة المطلوبة وبالتالي فإننا نتركه كما هو}} \; \underbrace{\frac{1}{z}}_{\text{هذا المقدار يحتاج إعادة تشكيله}} = \frac{1}{(z-1)} \cdot \frac{1}{(z-1)+1}$$

شرط صحة المفكوك موجود في هذه الفترة وهو $|z-1| < 1$

$\therefore f(z) = \dfrac{1}{(z-1)} \left[1 + (z-1)\right]^{-1}$

نفك هذا المقدار باستخدام نظرية ذات الحدين

$$= \frac{1}{(z-1)} \left[1 - (z-1) + (z-1)^2 - (z-1)^3 + \cdots\right]$$

$$\therefore f(z) = \underbrace{\frac{1}{(z-1)}}_{\text{principal part}} \underbrace{- 1 + (z-1) - (z-1)^2 + \cdots}_{\text{analytic part}} \rightarrow$$ المفكوك المطلوب

EX 42 Find the Laurent's series of the function:

$$F(z) = \frac{1}{(z-2)^2(2z-1)}$$ about the points

ⓐ $z = \frac{1}{2}$ ⓑ $z = 2$.

find the domain of convergence in each case.

Solution:- $$f(z) = \frac{1}{(z-2)^2(2z-1)}$$

has singular points at $z = 2$, $z = \frac{1}{2}$

(لأن $f(2)$, $f(\frac{1}{2}) = \infty$)

ⓐ $z_0 = \frac{1}{2}$ النقطة المراد إيجاد المفكوك حولها

the domain of convergence is $0 < |z - \frac{1}{2}| < \frac{3}{2}$

لأن أقرب sing. point للنقطة $z_0 = \frac{1}{2}$ هي z_0 نفسها (لأنها هي ذاتها sing. point)

المسافة بين $z_0 = \frac{1}{2}$ و $z = 2$

$$\ast \therefore f(z) = \frac{1}{(2z-1)(z-2)^2} = \frac{1}{2} \underbrace{\frac{1}{(z-\frac{1}{2})}} \underbrace{\frac{1}{(z-2)^2}}$$

هذا المقدار موجود على الصورة المطلوبة وبالتالي فإننا نتركه كما هو

هذا المقدار مطلوب إعادة تشكيله

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{(z-\frac{1}{2})} \frac{1}{\left[(z-\frac{1}{2}) - \frac{3}{2}\right]^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{(z-\frac{1}{2})} \frac{1}{\frac{9}{4}\left[1 - \frac{2}{3}(z-\frac{1}{2})\right]^2}$$

$$= \frac{2}{9} \frac{1}{(z-\frac{1}{2})} \underbrace{\left[1 - \frac{2}{3}(z-\frac{1}{2})\right]^{-2}}$$

نلاحظ هذا المقدار باستخدام تطبيق ذات الحدين
شرط صحة المفكوك موجود في هذه الحالة
هي $|z-1| < \frac{3}{2}$

$$\therefore f(z) = \frac{2}{9}\,\frac{1}{(z-\frac{1}{2})}\left[1 + \frac{4}{3}\left(z-\frac{1}{2}\right) + \frac{(-2)(-3)}{2!}\left[\frac{2}{3}\left(z-\frac{1}{2}\right)\right]^2 + \cdots\cdots\right]$$

$$= \frac{2}{9}\,\frac{1}{(z-\frac{1}{2})} + \frac{8}{27} + \frac{8}{27}\left(z-\frac{1}{2}\right) + \cdots\cdots \longrightarrow$$ المفكوك المطلوب

---

b) $z_0 = 2 \longrightarrow$ النقطة المراد إيجاد المفكوك حولها

the domain of convergence is $0 < |z-2| < \frac{3}{2}$

لأن أقرب sing. point للنقطة $z_0 = 2$ من z_0 نفسها (لأنها هذه الحالة sing. point)

المسافة بين $z_0 = 2$ و $z = \frac{1}{2}$ لأنها الـ sing. point الثانية

$$* \therefore f(z) = \underbrace{\frac{1}{(z-2)^2}}_{\text{هذا المقدار موجود على الصورة المطلوبة يترك كما هو}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2(z-\frac{1}{2})}}_{\text{هذا المقدار مطلوب إعادة تشكيله}}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{(z-2)^2}\,\frac{1}{[(z-2)+\frac{3}{2}]}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{(z-2)^2}\,\frac{1}{\frac{3}{2}}\,\frac{1}{[1+\frac{2}{3}(z-2)]}$$

$$= \frac{1}{3}\,\frac{1}{(z-2)^2}\left[1+\frac{2}{3}(z-2)\right]^{-1} \longrightarrow$$ نفك هذا المقدار باستخدام نظرية ذات الحدين

$$= \frac{1}{3}\,\frac{1}{(z-2)^2}\left[1 - \frac{2}{3}(z-2) + \left(\frac{2}{3}(z-2)\right)^2 + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{3(z-2)^2} - \frac{2}{9}\,\frac{1}{(z-2)} + \frac{4}{27} - \frac{8}{81}(z-2)$$

$$+ \cdots\cdots \longrightarrow$$ المفكوك المطلوب

$$\therefore f(z) = \frac{1}{(1-z)} \cdot \frac{1}{((z-1)+2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{(1-z)} \cdot \frac{1}{(1+\frac{1}{2}(z-1))}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{(1-z)}\left[1+\frac{1}{2}(z-1)\right]^{-1}$$ نفك هذا المقدار باستخدام نظرية ذات الحدين لأن شرط التقارب لمجموعة المتكول موجود في هذه الفترة لأنه $\left|\frac{z-1}{2}\right| < 1$

$$= \frac{1}{2}\frac{-1}{(z-1)}\left[1-\frac{1}{2}(z-1)+\left(\frac{1}{2}(z-1)\right)^2 - \left(\frac{1}{2}(z-1)\right)^3 + \cdots\right]$$

$$= \frac{-1}{2}\frac{1}{(z-1)} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}(z-1) + \frac{1}{16}(z-1)^2 - \cdots$$ المتكول المطلوب

(2) في المنطقة $2 < |z-1| < \infty$

$$\therefore |z-1| > 2 \longrightarrow \therefore \left|\frac{2}{z-1}\right| < 1$$

$$* \therefore f(z) = \frac{1}{(1-z)(1+z)} = \underbrace{\frac{-1}{(z-1)}}_{\text{هذا المقدار يترك كما هو بدون تغيير}} \cdot \underbrace{\frac{1}{(1+z)}}_{\text{هذا المقدار مطلوب إعادة تشكيله بحيث تتوافر فيه شروط التقارب الموجودة في الفترة السابقة } |z-1|>2}$$

$$= \frac{-1}{(z-1)} \cdot \frac{1}{((z-1)+2)}$$

$$= \frac{-1}{(z-1)} \cdot \frac{1}{(z-1)\left[1+\frac{2}{(z-1)}\right]}$$

$$= \frac{-1}{(z-1)^2}\left[1+\frac{2}{(z-1)}\right]^{-1}$$ نفك هذا المقدار باستخدام نظرية ذات الحدين لأن شرط التقارب لمجموعة المتكول موجود لأنه $\left|\frac{2}{z-1}\right| < 1$

$$\therefore F(z) = \frac{-1}{(z-1)^2}\left[1 - \frac{2}{(z-1)} + \frac{4}{(z-1)^2} - \frac{8}{(z-1)^3} + \cdots\right]$$

$$= \frac{-1}{(z-1)^2} + \frac{2}{(z-1)^3} - \frac{4}{(z-1)^4} + \frac{8}{(z-1)^5} - \cdots$$ ← المفكوك المطلوب

EX 44 Find the Laurent series expansion of the function $F(z) = \dfrac{1}{z(z-1)(z-2)}$ in the domain

(a) $0 < |z| < 1$ (b) $1 < |z| < 2$ (c) $|z| > 2$.

Solution:- (a) In the domain $0 < |z| < 1$ ← $z_0 = 0$

$$\therefore F(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{z}}_{\text{يترك كما هو}} \cdot \frac{1}{(z-1)} \cdot \frac{1}{(z-2)}$$

هذه المقادير يتم تشكيلهم بحيث
يتوافر فيها شروط التقارب الموجودة في الفترة السابقة $0<|z|<1$

$$= \frac{1}{z} \cdot \frac{-1}{1-z} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\left(1-\frac{z}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{z}\,(1-z)^{-1}\left(1-\frac{z}{2}\right)^{-1}$$

يتم فك هذه المقادير باستخدام نظرية
ذات الحدين لأن شرط التقارب لصحة
المفكوك موجود لأنه $|z| < 1$

$$\therefore F(z) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{z}\left[1 + z + z^2 + \cdots\right]\left[1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{z} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{z}\left(z + \frac{z}{2}\right) + \frac{1}{2}\,\frac{1}{z}\left(z^2 + \frac{z^2}{2} + \frac{z^2}{4}\right) + \cdots$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{z} + \frac{3}{4} + \frac{7}{8}\,z + \cdots$$ ← "المفكوك المطلوب"

(b) In the domain $1 < |z| < 2$

$$\therefore f(z) = \underbrace{\frac{1}{z}}_{\text{يترك كما هو}} \cdot \frac{1}{(z-1)} \cdot \frac{1}{(z-2)}$$

هذه المقادير يعاد تشكيلهم بحيث
يتوافق شروط التقارب الموجودة في
الفترة السابقة ← $1 < |z| < 2$

$$\therefore f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{-z\left(1-\frac{1}{z}\right)} \cdot \frac{1}{-2\left(1-\frac{z}{2}\right)}$$

ثم أخذنا "2-" عامل مشترك وذلك لأنه
$|z| < 2$ وبالتالي $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$
وعلى هذا فإنه يمكن إيجاد مفكوك ذات
الحدين المكافئ للقوس $\left(1-\frac{z}{2}\right)^{-1}$ بحيث
يتوافق شروط صحة هذا المفكوك
بعد إجراء التعديل السابق في القوسين

أخذنا "z" عامل مشترك وذلك لأنه
$|z| > 1$ في هذه الفترة وبالتالي $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$
وعلى هذا فإنه يمكن إيجاد مفكوك
ذات الحدين المكافئ للقوس $\left(1-\frac{1}{z}\right)^{-1}$
بحيث يتوافق شرط صحة هذا المفكوك بعد إجراء
التعديل السابق في القوس

$$\therefore f(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{z^2} \cdot \left(1-\frac{1}{z}\right)^{-1}\left(1-\frac{z}{2}\right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{z^2}\left[1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right]\left[1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+\frac{z^3}{8}+\cdots\right]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{z^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\right)+\frac{1}{2}\frac{1}{z^2}\left(\frac{z}{2}+\frac{z}{4}+\frac{z}{8}+\cdots\right)$$

$$+\frac{1}{2}\frac{1}{z^2}\left(\frac{z^2}{4}+\frac{z^2}{8}+\cdots\right)+\cdots$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{z^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\right)+\frac{1}{4}\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots\right)$$

$$+\frac{1}{8}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots\right)+\cdots \longleftarrow \text{المفكوك المطلوب}$$

(c) In the domain $|z| > 2$.

$$\therefore\ F(z) = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{(z-1)}\cdot\frac{1}{(z-2)}$$

$$= \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{z(1-\frac{1}{z})}\cdot\frac{1}{z(1-\frac{2}{z})}$$

أخذنا z عامل مشترك وذلك لأن

$|\frac{1}{z}| < 1$ وبالتالي $|\frac{2}{z}| < 1$ وبالتالي $|z| > 2$ في هذه الفترة

وعلى هذا فإنه يمكن إيجاد مفكوك ذات الحدين المكافئ

للقوسين $(1-\frac{1}{z})^{-1}$ و $(1-\frac{2}{z})^{-1}$ حيث يتوافر شرط صحة

هذا المفكوك بعد إجراء التعديل السابق على تلك الأقواس.

$$\therefore\ F(z) = \frac{1}{z^3}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{-1}\left(1-\frac{2}{z}\right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{z^3}\left[1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right]\left[1+\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}+\frac{8}{z^3}+\cdots\right]$$

$$= \frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^3}\left[\frac{1}{z}+\frac{2}{z}\right]+\frac{1}{z^3}\left[\frac{1}{z^2}+\frac{4}{z^2}+\frac{2}{z^2}\right]+\cdots$$

$$= \frac{1}{z^3}+\frac{3}{z^4}+\frac{7}{z^5}+\cdots \longrightarrow$$ "المفكوك المطلوب"

EX 45 Expand the given functions in a Laurent series either within the indicated annulus or in the neighbourhood of the given point. In the later case, determine the domain of convergence.

(a) $\dfrac{1}{z(1-z)}$, $z=0$, $z=1$.

(b) $\dfrac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$, $1<|z|<2$.

Solution :- (a) $F(z) = \dfrac{1}{z(1-z)}$, has singular points at $z=0$, $z=1$ (لأن $F(0)$, $F(1) = \infty$)

① $Z_o = 0$ ⟵ النقطة المراد إيجاد المفكوك حولها (وهى أيضا sing. point للدالة $F(Z)$).

وحيث أن المطلوب هو إيجاد Laurent series فى الـ neighbourhood of the point $Z_o = 0$

أى أن المفكوك مطلوب فى المنطقة :-

$$0 < |Z - 0| < 1$$

$$* \because F(Z) = \frac{1}{Z(1-Z)}$$

$$= \frac{1}{Z}(1-Z)^{-1}$$

يتم فك هذا المقدار باستخدام نظرية ذات الحدين لأن شرط التقارب لصحة المفكوك موجود لأن $|Z| < 1$ فى هذه الفترة

$$\therefore F(Z) = \frac{1}{Z}(1 + Z + Z^2 + Z^3 + \cdots)$$

$$\therefore F(Z) = \frac{1}{Z} + 1 + Z + Z^2 + Z^3 + \cdots$$ ⟵ "المفكوك المطلوب"

② $Z_o = 1$ ⟵ النقطة المراد إيجاد المفكوك حولها . (وهى أيضا sing. point للدالة $F(Z)$)

حيث أن المطلوب هو إيجاد Laurent series فى الـ neighbourhood of the point $Z_o = 1$.

أى أن المطلوب هو المفكوك فى المنطقة :-

$$0 < |Z - 1| < 1$$

$$* \because F(Z) = \frac{1}{Z(1-Z)} = -\frac{1}{(Z-1)} \cdot \frac{1}{Z}$$

جاهز يترك كما هو — يراد تشكيله

$$\therefore f(z) = \frac{-1}{(z-1)} \cdot \frac{1}{(z-1)+1}$$

$$= \frac{-1}{(z-1)} \left[1+(z-1)\right]^{-1}$$

يتم فك هذا المقدار باستخدام نظرية ذات الحدين لأن شرط التقارب لصحة المفكوك موجود لأنه $|z-1|<1$ في هذه الفترة.

$$\therefore f(z) = \frac{-1}{(z-1)}\left[1-(z-1)+(z-1)^2-(z-1)^3+\cdots\right]$$

$$= \frac{-1}{(z-1)} + 1 - (z-1) + (z-1)^2 - \cdots$$

"المفكوك المطلوب"

(b) $\therefore f(z) = \dfrac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$

والمطلوب إيجاد Laurent series للدالة $f(z)$ في الفترة:

$$1<|z|<2 \longrightarrow \therefore z_0 = 0$$

$$* \; f(z) = (z^2-2z+5) \cdot \frac{1}{(z-2)} \cdot \frac{1}{(z^2+1)}$$

$$= (z^2-2z+5) \cdot \frac{-1}{2} \frac{1}{\left(1-\frac{z}{2}\right)} \cdot \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{z^2}\right)}$$

$|z|<2 \rightarrow \left|\frac{z}{2}\right|<1$

$|z|>1 \rightarrow \left|\frac{1}{z}\right|<1$

$$\therefore f(z) = -\frac{1}{2z^2}(z^2-2z+5)\left[1-\frac{z}{2}\right]^{-1}\left[1+\frac{1}{z^2}\right]^{-1}$$

$$= -\frac{1}{2z^2}(z^2-2z+5)\left[1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+\frac{z^3}{8}+\cdots\right]\left[1-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^4}-\cdots\right]$$

$$= -\frac{1}{2z^2}(z^2-2z+5)\Big[\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}-\cdots\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{32}-\cdots\right)z$$
$$+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{16}+\frac{1}{64}-\cdots\right)z^2+\cdots\cdots\Big]$$

$$\therefore F(z) = -\frac{1}{2z^2}(z^2 - 2z + 5)\Big[(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \cdots) + \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \cdots)z + \frac{1}{4}(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \cdots)z^2 + \cdots\Big)$$

$$= -\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \cdots)\cdot\frac{1}{z^2}(z^2 - 2z + 5)\Big[1 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{8}z^3 + \frac{1}{16}z^4 + \cdots\Big]$$

$$= -\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \cdots)(1 - \frac{2}{z} + \frac{5}{z^2})\Big[1 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{8}z^3 + \frac{1}{16}z^4 + \cdots\Big]$$

$$= -\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \cdots)\Big[(1 - 1 + \frac{5}{4}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{5}{8})z + (\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{5}{16})z^2 + \cdots$$

$$= -\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \cdots)\Big[\frac{5}{4} + \frac{5}{8}z + \frac{5}{16}z^2 + \cdots\Big]$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4}(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \cdots)\Big[1 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}z^2 + \cdots\Big]$$

$$= -\frac{5}{8}(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \cdots)\Big[1 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}z^2 + \cdots\Big]$$

"وهو المفكوك المطلوب" ←

Ex 46 Find the Laurent's expansion around $z = 0$ of the following functions

(a) $\dfrac{\cos z}{z^2}$ (b) $z^2 e^{1/z}$. Find the domain of convergence.

Solution:- (a) $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^2}$, $z_0 = 0$

has a singular point at $z = 0$ ($\xrightarrow{\text{لأن}} f(0) = \infty$)

* The domain of convergence is $0 < |z - \underset{z_0}{0}| < \infty$

* لإيجاد مفكوك Laurent المطلوب نتبع الآتي :-

$\because \cos z = 1 - \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^4}{4!} - \dots$ Taylor's series for $\cos z$ around $z = 0$ (Maclaurin expansion)

$\therefore f(z) = \dfrac{\cos z}{z^2} = \dfrac{1}{z^2}\left[1 - \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^4}{4!} - \dots\right]$

$= \dfrac{1}{z^2} - \dfrac{1}{2!} + \dfrac{z^2}{4!} - \dfrac{z^4}{6!} + \dots \longrightarrow$ "المفكوك المطلوب"

(b) $f(z) = z^2 e^{1/z}$, $z_0 = 0$

has a singular point at $z = 0$ ($\xrightarrow{\text{لأن}} f(0) = \infty$)

* The domain of convergence is $0 < |z - \underset{z_0}{0}| < \infty$.

* لإيجاد مفكوك Laurent المطلوب نتبع الآتي :-

$\because e^{\frac{1}{z}} = 1 + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{2!}\dfrac{1}{z^2} + \dfrac{1}{3!}\dfrac{1}{z^3} + \dots$ Taylor's series for $e^{\frac{1}{z}}$ around $z = 0$ (Maclaurin exp)

$$\therefore f(z) = z^2 e^{1/z} = z^2\left[1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \cdots\right]$$

$$= z^2 + z + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}\frac{1}{z} + \frac{1}{4!}\frac{1}{z^2} + \cdots$$

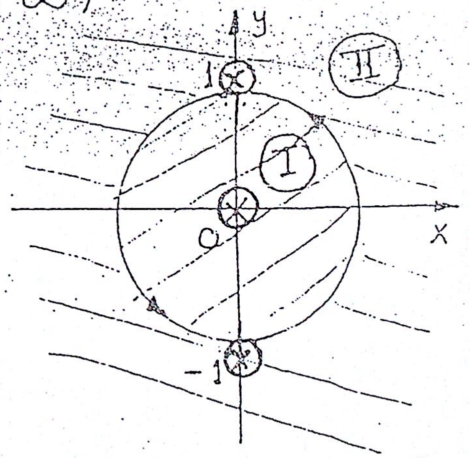
المفكوك المطلوب ←

EX 47 Obtain the few non zero terms of the Laurent series expansions in powers of "z" for the following functions and determine the domain of convergence

(a) $\dfrac{e^z}{z(z^2+1)}$ (b) $\operatorname{Cosec} z$ (c) $\dfrac{1}{e^z - 1}$ (d) $\dfrac{1}{z^2 \operatorname{sh} z}$

Solution:- (a) $f(z) = \dfrac{e^z}{z(z^2+1)}$

has singular points at $z = 0$, $z = +i$, $z = -i$
(لأنه $\rightarrow f(0), f(i), f(-i) = \infty$)



* نرسم دائرة مركزها النقطة $z_0 = 0$ (لأنه المطلوب إيجاد المفكوك بدلالة قوى z ومداسی أي z_0 (النقطة المطلوب إيجاد المفكوك حولها) تساوی صفر) وتمر تقريبا بالنقطة i (أو $-i$) (أقرب sing. point للنقطة $z_0 = 0$).

* كما هو مبين في الشكل توجد منطقتين (I) (الموجودة داخل الدائرة) و (II) (الموجودة خارج الدائرة إلى ما لانهاية) يجب إيجاد مفكوك Laurent فيهما حيث يجب كتابة كل منهما كالآتي:

$0 < |z - 0| < 1 \longrightarrow$ (I) المنطقة

و $1 < |z - 0| < \infty \longrightarrow$ (II) المنطقة

* ولإيجاد مفكوك Laurent للدالة $f(z)$ حول النقطة $z_0 = 0$ ف

المنطقتين (I) ، (II) فإننا نتبع الآتى :-

$$\therefore e^{Z} = 1 + Z + \frac{Z^2}{2!} + \frac{Z^3}{3!} + \cdots$$ Taylor series for e^Z around $Z = 0$ (Maclaurin expansion)

$$\therefore f(Z) = \frac{e^Z}{Z(Z^2+1)}$$

$$= e^Z \, \frac{1}{Z} \, (1 + Z^2)^{-1}$$

نفك هذا المقدار باستخدام مفكوك ذات الحدين وذلك لأنه شرط صحة المفكوك موجود فى هذه الفترة لأنه $|Z| < 1$

$$\therefore f(Z) = \underbrace{\left[1 + Z + \frac{Z^2}{2} + \frac{Z^3}{6} + \cdots\right]}_{e^Z} \cdot \frac{1}{Z} \overbrace{\left[1 - Z^2 + Z^4 - \cdots\right]}^{(1+Z^2)^{-1}}$$

$$= \left[1 + Z + \frac{Z^2}{2} + \frac{Z^3}{6} + \cdots\right]\left[\frac{1}{Z} - Z + Z^3 - \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{Z} + 1 + \left(\frac{Z}{2} - Z\right) + \left(\frac{Z^2}{6} - Z^2\right) + \cdots$$

$$= \frac{1}{Z} + 1 - \frac{Z}{2} - \frac{5}{6} Z^2 + \cdots$$ ← "المفكوك المطلوب"

* فى المنطقة ← $1 < |Z| < \infty$

$\rightarrow \therefore |Z| > 1 \rightarrow \therefore \left|\frac{1}{Z}\right| < 1$.

$$\therefore f(Z) = e^Z \cdot \frac{1}{Z} \cdot \frac{1}{Z^2\left(1 + \frac{1}{Z^2}\right)}$$

$\left|\frac{1}{Z^2}\right| < 1$ ←

أخذنا Z^2 مشترك وذلك لأنه $\left|\frac{1}{Z}\right| < 1$ (فى هذه الفترة).

وبالتالى يمكننا إيجاد مفكوك ذات الحدين المكافئ للقوس $\left(1 + \frac{1}{Z^2}\right)^{-1}$ حيث يتوافر شرط صحة هذا المفكوك بعد إجراء التعديل السابق على القوس $(1 + Z^2)$

$$\therefore f(Z) = \left[1 + Z + \frac{Z^2}{2} + \frac{Z^3}{6} + \cdots\right] \cdot \frac{1}{Z^3} \left[1 + \frac{1}{Z^2}\right]^{-1}$$

$$\therefore f(Z) = \left[1 + Z + \frac{Z^2}{2} + \frac{Z^3}{6} + \frac{Z^4}{24} + \frac{Z^5}{120} + \cdots\right] \cdot \frac{1}{Z^3} \cdot \left[1 - \frac{1}{Z^2} + \frac{1}{Z^4} - \frac{1}{Z^6} + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{Z^3}\left[\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} \cdots\right) + \left(1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} \cdots\right) Z \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{24} \cdots\right) Z^2 + \cdots\cdots \right] \longrightarrow$$ "المكون المطلوب"

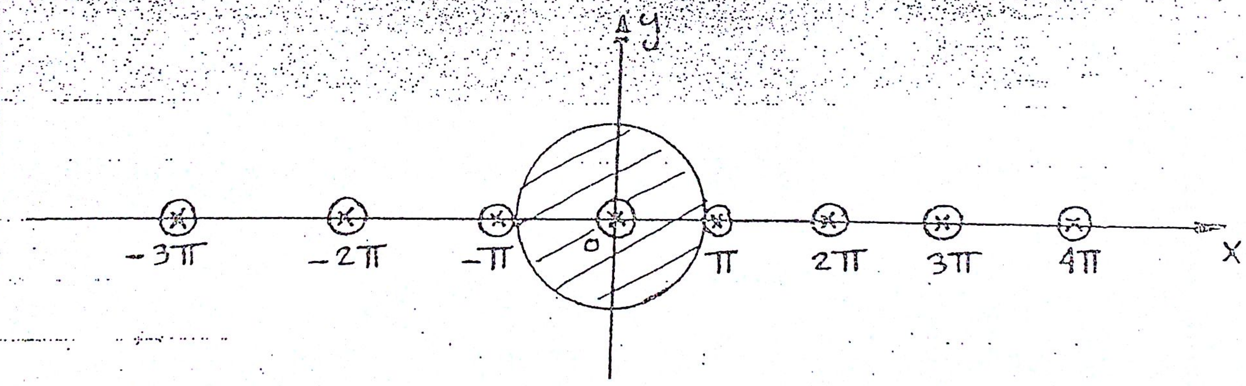
---

b) $f(Z) = \text{Cosec}\, Z = \dfrac{1}{\sin Z}$, $Z_0 = 0$

has singular points at $\rightarrow \sin Z = 0$

$\therefore Z = n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

* حيث أنه يوجد عدد لانهائي من الـ singular points فإنه يوجد لدينا عدد لانهائي من الـ "domains of convergence" وبالتالي فإنه يمكن إيجاد عدد لانهائي من الـ "Laurent's series" للدالة المعطاة $f(Z) = \text{Cosec}\, Z$ حول النقطة $Z_0 = 0$



* نفرض أننا سوف نوجد "Laurent series" للدالة $f(Z) = \text{Cosec}\, Z$ في المنطقة (المهشرة في الرسم) :-

$$0 < |Z - 0| < \pi$$

كمثال للعدد اللانهائي من Laurent series في المناطق المختلفة وذلك كالآتي :-

* $\because \sin Z = Z - \dfrac{Z^3}{3!} + \dfrac{Z^5}{5!} - \cdots \longrightarrow$ متسلسلة Maclaurin لـ $\sin Z$ حول النقطة $Z_0 = 0$.

* بقسمة "1" على المفكوك السابق لـ $\sin z$ يمكن الحصول على المفكوك المطلوب لـ $\operatorname{Cosec} z$ وذلك كالآتى :-

$$\begin{array}{r|l} \frac{1}{z}+\frac{z}{6}+\frac{7}{360}z^4+\dots & \\ \hline z-\frac{z^3}{6}+\frac{z^5}{120}-\dots & 1 \\ & 1-\frac{z^2}{6}+\frac{z^4}{120}-\dots \\ \hline & \frac{z^2}{6}-\frac{z^4}{120}+\dots \\ & \frac{z^2}{6}-\frac{z^4}{36}+\dots \\ \hline & \frac{7}{360}z^4-\dots \\ & \frac{7}{360}z^4+\dots \\ \hline & --- \end{array}$$

$$\therefore f(z) = \operatorname{Cosec} z = \frac{1}{\sin z}$$

$$= \frac{1}{z} + \frac{z}{6} + \frac{7}{360} z^4 + \dots \longrightarrow$$ "وهو المفكوك المطلوب"

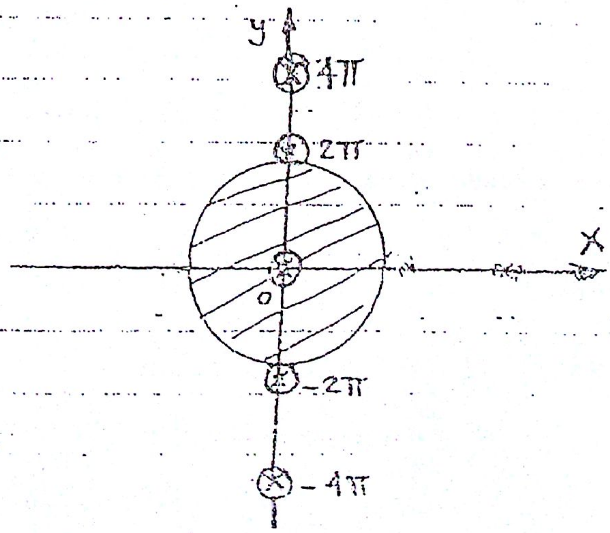
(c) $f(z) = \dfrac{1}{e^z - 1}$, $z_0 = 0$

has singular points at $\rightarrow e^z - 1 = 0$

$$\rightarrow e^z = 1 = e^{i(0+2n\pi)}$$

$$\rightarrow \therefore z = 2n\pi i \; , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

* حيث أنه يوجد عدد لانهائى من الـ "singular points" فإنه يوجد لدينا عدد لانهائى من الـ "domion of Convergence" وبالتالى فإنه يمكن إيجاد عدد لانهائى من الـ "Laurent series" للدالة المعطاة $f(z) = \dfrac{1}{e^z-1}$ حول النقطة $z_0 = 0$



* نوضح أننا سوف نوجد "Laurent series" للدالة $f(z)=\dfrac{1}{e^z-1}$ في المنطقة (المشارة في الرسم) :-

$$0<|z-0|<2\pi$$

كمثال للعدد اللانهائي من "Laurent series" في المناطق المختلفة وذلك كالآتي :-

* $\therefore\ e^z = 1+z+\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^3}{3!}+\dots \longrightarrow$ Maclaurin مفكوك
لـ e^z حول النقطة $z_0=0$

$$\therefore\ e^z-1 = z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{6}+\frac{z^4}{24}+\dots$$

* بقسمة "1" على المفكوك السابق لـ e^z-1 يمكن الحصول على المفكوك المطلوب
لـ $\dfrac{1}{e^z-1}$ وذلك كالآتي :-

Divisor: $z+\dfrac{z^2}{2}+\dfrac{z^3}{6}+\dfrac{z^4}{24}+\dots$

Quotient: $\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{12}z-\dots$

$$\begin{array}{l}
\cancel{1} \\
\cancel{1}+\dfrac{z}{2}+\dfrac{z^2}{6}+\dfrac{z^3}{24}+\dots \\
\hline
-\cancel{\dfrac{z}{2}}-\dfrac{z^2}{6}-\dfrac{z^3}{24}-\dots \\
-\cancel{\dfrac{z}{2}}-\dfrac{z^2}{4}-\dfrac{z^3}{12}-\dots \\
\hline
\dfrac{1}{12}z^2+\dfrac{1}{24}z^3+\dots \\
\dfrac{1}{12}z^2+\dfrac{1}{24}z^3+\dots \\
\hline
+\dots
\end{array}$$

$$\therefore\ f(z)=\frac{1}{e^z-1}$$

$$=\frac{1}{z}-\frac{1}{2}+\frac{1}{12}z+\dots \longrightarrow$$ "وهو المفكوك المطلوب"

---

(2) $f(z)=\dfrac{1}{z^2\,sh\,z}$, $z_0=0$.

has singular points at $z^2\,sh\,z=0$

$\longrightarrow\ \therefore\ z^2=0 \longrightarrow$ pole of order "2" at $z=0$ (double pole)

OR $sh z = 0 \rightarrow \because i\, sh z = \sin i z$

$\rightarrow \therefore \frac{1}{i} \sin i z = 0 \rightarrow \therefore i z = n\pi$

$\therefore z = \frac{1}{i} n\pi$ simple poles

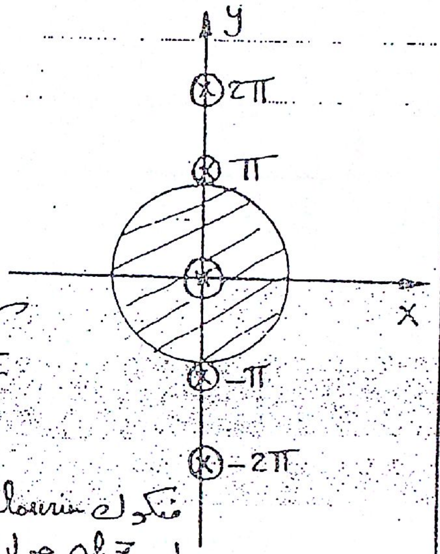
$= -i n\pi \;,\; n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

* حيث أنه يوجد عدد لانهائى من الـ "singular points" فإنه يوجد لدينا عدد لانهائى من الـ "domian of convergence" وبالتالى فإنه يمكن إيجاد عدد لانهائى من الـ "Laurent's series" للدالة المعطاة $F(z) = \frac{1}{z^2 sh z}$ حول النقطة $z_0 = 0$

* نفرض أننا سوف نوجد "Laurent series" للدالة $F(z) = \frac{1}{z^2 sh z}$ فى المنطقة (المؤشرة فى الرسم المقابل) :-

$$0 < |z - 0| < \pi$$

كمثال للعدد اللانهائى من "Laurent series" فى المناطق المختلفة وذلك كالآتى :-



* $\because sh z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots$ — مفكوك Maclaurin لـ $sh z$ حول النقطة $z_0 = 0$

$$\therefore z^2 sh z = z^3 + \frac{z^5}{6} + \frac{z^7}{120} + \dots$$

* بقسمة "1" على المفكوك السابق لـ $z^2 sh z$ يمكن الحصول على المفكوك المطلوب لـ $\frac{1}{z^2 sh z}$ وذلك كالآتى :-

$$\begin{array}{l|l}
z^3 + \frac{z^5}{6} + \frac{z^7}{120} + \dots & 1 \\
\hline
\frac{1}{z^3} - \frac{1}{6z} + \frac{7}{360} z - \dots & 1 + \frac{z^2}{6} + \frac{z^4}{120} + \dots \\
 & \overline{- \frac{z^2}{6} - \frac{z^4}{120} - \dots} \\
 & - \frac{z^2}{6} - \frac{z^4}{36} - \dots \\
 & \overline{\frac{7}{360} z^4 + \dots} \\
 & \frac{7}{360} + \dots \\
\end{array}$$

$\therefore F(z) = \frac{1}{z^2 sh z} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{6z} + \frac{7}{36} z - \dots$ — وهو المفكوك المطلوب

* إعادة لتعريف الـ "singular points" بإستخدام Laurent's series :-

* يمكن من إيجاد "Laurent's series" للدالة f(Z) معرفة نوع الـ "singular point" وذلك كالآتى :-

1) Poles of order "m" :-

* إذا كان الـ "principal part" (الجزء من Laurent's series الذى يحتوى على الحدود ذات الأسس السالبة لـ (Z − Z₀)) يحتوى على عدد محدود من الحدود فى الصورة :-

$$\frac{b_1}{(Z-Z_0)} + \frac{b_2}{(Z-Z_0)^2} + \cdots + \frac{b_m}{(Z-Z_0)^m} , \; a_m \neq 0$$

أكبر الأسس السالبة

فإننا نقول أن :-

" F(Z) has a pole of order "m" at $Z = Z_0$ ".

* إذا كان الـ principal part يحتوى على حد واحد فقط وهو $\frac{b_1}{(Z-Z_0)}$ فإنه يكون للدالة $f(Z)$ ← "simple pole" عند $Z = Z_0$

* إذا كان آخر حد فى الـ "principal part" هو $\frac{b_2}{(Z-Z_0)^2}$ فإنه يكون للدالة $f(Z)$ ← "double pole" عند $Z = Z_0$.

* إذا كان آخر حد فى الـ "principal part" هو $\frac{b_3}{(Z-Z_0)^3}$ فإنه يكون للدالة $f(Z)$ ← pole of order "3" عند $Z = Z_0$.

وهكذا - - - - - .

2) Essential singularity :-

* إذا كان الـ "principal part" من Laurent's series يحتوى على عدد لانهائى من الحدود ذات الأسس السالبة لـ $(Z - Z_0)$

$$\frac{b_1}{(Z-Z_0)} + \frac{b_2}{(Z-Z_0)^2} + \cdots \cdots \to \infty$$

نأرنه تعال أ.ب :-

"$f(z)$ has an essential singularity at $z = z_0$"

3) Removable singularity :-

* إذا كان الـ "principal part" في الـ Laurent's series غير موجود
(أى أنه لا توجد حدود ذات أسس سالبة لـ $(z - z_0)$ في
Laurent's series)

نأرنه تعال أ.ب :-

"$f(z)$ has a removable singularity at $z = z_0$"

EX 48 Find Laurent series about the indicated singularity for each of the following functions. Name the singularity in each case and give the region of Convergence of each series

a) $\dfrac{e^z}{(z-1)^2}$, $z = 1$ b) $z \cos \dfrac{1}{z}$, $z = 0$

c) $\dfrac{\sin z}{z - \pi}$, $z = \pi$ d) $\dfrac{z}{(z+1)(z+2)}$, $z = -1$

e) $\dfrac{1}{z(z+2)^3}$, $z = 0$, $z = -2$.

Solution :- a) $f(z) = \dfrac{e^z}{(z-1)^2}$, $z_0 = 1$ is a sing point of $f(z)$

لأن $f(1) = \infty$

$$\therefore f(z) = \frac{1}{(z-1)^2} e^{(z-1)+1} = e \frac{1}{(z-1)^2} e^{(z-1)}$$

$$= e \frac{1}{(z-1)^2} \left[1 + (z-1) + \frac{(z-1)^2}{2!} + \frac{(z-1)^3}{3!} + \cdots \right]$$

$$= e \left[\underbrace{\frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{(z-1)}}_{\text{principal part}} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}(z-1) + \cdots \right]$$

حيث أن الـ principal part للمكوك السابق يحتوى على عدد محدود من
الحدود

$$\rightarrow \frac{1}{(z-1)} + \frac{1}{(z-2)^2}$$

فإن

$F(z)$ has a double pole at $z = 1$.

* The region of convergence is :

$$0 < |z-1| < \infty .$$

---

b) $F(z) = z \cos\frac{1}{z}$, $z_0 = 0 \rightarrow$ is a sing. point of $F(z) \xrightarrow{\text{لأن}} F(0) = \infty$

$\because \cos u = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \dots \rightarrow$ Maclaurin expansion of $\cos u$

$$\therefore \cos\frac{1}{z} = 1 - \frac{1}{2!}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{4!}\frac{1}{z^4} + \dots$$

$$\therefore F(z) = z\left[1 - \frac{1}{2!}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{4!}\frac{1}{z^4} + \dots\right]$$

$$= z - \underbrace{\frac{1}{2!}\frac{1}{z} + \frac{1}{4!}\frac{1}{z^3} + \dots}_{\text{principal part}}$$

$\therefore F(z)$ has an essential singularity at $z = 0$

(وذلك لأن الـ principal part للمكوك السابق يحتوى على عدد لانهائى من الحدود ذات الأسس السالبة لـ z $((z_0 = 0))$.

* The region of convergence is :

$$0 < |z-0| < \infty .$$

(c) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z - \pi}$, $z_0 = \pi \longrightarrow$ is a singular point of $f(z)$ $\xrightarrow{\text{لأن}}$ $f(\pi) = \infty$

$\because \sin((z-\pi)+\pi) = -\sin(z-\pi)$

$$\therefore f(z) = \frac{\sin z}{(z-\pi)} = \frac{\sin((z-\pi)+\pi)}{(z-\pi)}$$

$$= \frac{-\sin(z-\pi)}{(z-\pi)}$$

$$\because \sin u = u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \cdots$$

$$\therefore \sin(z-\pi) = (z-\pi) - \frac{(z-\pi)^3}{3!} + \frac{(z-\pi)^5}{5!} \cdots$$

$$\therefore f(z) = \frac{-1}{(z-\pi)}\left[(z-\pi) - \frac{(z-\pi)^3}{3!} + \frac{(z-\pi)^5}{5!} - \cdots\right]$$

$$= -1 + \frac{(z-\pi)^2}{3!} - \frac{(z-\pi)^4}{5!} + \cdots \longrightarrow$$ المفكوك المطلوب

$\therefore f(z)$ has a removable singularity at $z = \pi$

(وذلك لأن الـ principal part في المفكوك السابق غير موجود).

* The series is convergent for all values of z.

ملحوظة هامة: في حالة وجود Removable sing فإن المتوالية الناتجة تكون Convergent for all values of "z"

(d) $f(z) = \dfrac{z}{(z+1)(z+2)}$, $z_0 = -1 \longrightarrow$ is a singular point of $f(z)$ $\xrightarrow{\text{لأن}}$ $f(-1) = \infty$

$$* \; f(z) = \underbrace{\frac{1}{(z+1)}}_{\text{يترك كما هو}} \cdot \underbrace{\frac{z}{(z+2)}}_{\text{يعاد تشكيل هذا المقدار}}$$

$$\therefore f(z) = \frac{1}{(z+1)} \cdot \frac{((z+1)-1)}{1+(z+1)}$$

$$= \frac{1}{(z+1)}\left[(z+1)-1\right]\left[1+(z+1)\right]^{-1}$$ يتم فك هذا المقدار بنظرية ذات الحدين

$$\therefore F(Z) = \frac{[(Z+1)-1]}{(Z+1)}\left[1-(Z+1)+(Z+1)^2-\cdots\right]$$

$$= \frac{1}{(Z+1)}\left[(Z+1)-1-(Z+1)^2+(Z+1)+(Z+1)^3\right.$$

$$\left.-(Z+1)^2+\cdots\cdots\right]$$

$$= -\frac{1}{(Z+1)}+2-2(Z+1)+2(Z+1)^2-\cdots\cdots$$

المفكوك المطلوب ←

$\therefore$ F(Z) has a simple pole at $Z = -1$

(وذلك لأن الـ principal part في المفكوك السابق يحتوى على حد واحد هو $\frac{-1}{Z+1}$)

$\ast$ The region of Convergence is :-

$$0 < |Z+1| < 1$$

(e) Case (1) :- $Z_0 = 0$ → sing. point of $F(Z)$ لأن $F(0) = \infty$

$$f(Z) = \frac{1}{Z(Z+2)^3} = \frac{1}{Z}\cdot\frac{1}{8(1+\frac{Z}{2})^3}$$

$$= \frac{1}{8}\,\frac{1}{Z}\,\left(1+\frac{Z}{2}\right)^{-3}$$

يتم فك هذا المقدار باستخدام نظرية ذات الحدين

$$= \frac{1}{8Z}\left[1-3\left(\frac{Z}{2}\right)+\frac{(-3)(-4)}{2!}\left(\frac{Z}{2}\right)^2+\frac{(-3)(-4)(-5)}{3!}\left(\frac{Z}{2}\right)^3\right.$$

$$\left.+\cdots\cdots\right]$$

$$= \frac{1}{8Z}-\frac{3}{16}+\frac{3}{16}Z-\frac{5}{32}Z^2+\cdots$$

المفكوك المطلوب ←

$\therefore$ $F(z)$ has a simple pole at $z=0$.
(لأن ال principal part في المفكوك السابق يحتوي على حد واحد هو $\frac{1}{8z}$)

* The region of Convergence is :-

$$0 < |z-0| < 2 .$$

---

* Case ② :- $z_0 = -2 \longrightarrow$ sing. point of $F(z) \xrightarrow{\text{لأن}} F(-2) = \infty$

$$F(z) = \frac{1}{z(z+2)^3} = \frac{1}{(z+2)^3} \cdot \frac{1}{((z+2)-2)}$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{1}{(z+2)^3} \cdot \frac{1}{(1-\frac{1}{2}(z+2))}$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{1}{(z+2)^3} \left[1-\frac{1}{2}(z+2)\right]^{-1}$$

يتم فك هذا المقدار باستخدام نظرية ذات الحدين

$$= -\frac{1}{2} \frac{1}{(z+2)^3} \left[1+\frac{1}{2}(z+2)+\frac{1}{4}(z+2)^2 + \frac{1}{8}(z+2)^3 + \cdots\cdots\right]$$

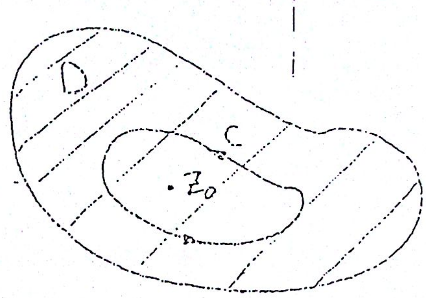
$$= -\frac{1}{2(z+2)^3} - \frac{1}{4(z+2)^2} - \frac{1}{8(z+2)} - \frac{1}{16} - \frac{1}{32}(z+2) + \cdots \longrightarrow \text{"المفكوك المطلوب"}$$

$F(z)$ has a pole of order "3" at $z=-2$.
(لأن ال principal part يحتوي على عدد محدود من الحدود ذات الأس السالبة في $(z+2)$ وأكبرها هو "3")

* The region of convergence is :-

$$0 < |z+2| < 2 .$$

* Residues of $f(z)$:-



* إذا كان للدالة $f(z)$ ← "isolated singularity" عند النقطة z_0 الموجودة في المنطقة "D" فإننا نعرف مقدار يسمى بـ ←
Residue of $f(z)$ at z_0
والذي يكتب في الصورة الآتية $\text{Res}[f(z), z_0]$

$$\text{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,dz = b_1 \qquad (1)$$

حيث: * "C" هو عبارة عن أي مسار مغلق مأخوذ في عكس عقارب الساعة (الإتجاه الموجب) موجود في المنطقة "D" حيث تكون الدالة $f(z)$ ← analytic في المنطقة التي يحيط بها هذا المسار ماعدا عند النقطة "z_0" الموجودة داخل المسار المغلق (كما هو مبين بالشكل).

* "b_1" هو عبارة معامل $(z-z_0)^{-1}$ في مفكوك "Laurent" للدالة $f(z)$ حول الـ "singular point z_0"

* من المعادلة (1) نجد أن:

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i\, b_1 = 2\pi i\, \text{Res}[f(z), z_0] \qquad (2)$$

* حيث يمكن إستخدام المعادلة (2) لحساب التكاملات التي تكون على الصورة:

$$\oint_C f(z)\,dz$$

حيث يحيط المسار المغلق "C" ← "one singular point of $f(z)$ at z_0"

* ويتم ذلك إما بحساب مفكوك Laurent للدالة $f(z)$ حول النقطة

Z_0 (كما سبق دراسة ذلك من قبل) ويكون معامل الحد $(Z-Z_0)^{-1}$ في هذا المفكوك هو ما يسمى بال residue للدالة $f(Z)$ عند نقطة Z_0 ← $Res\,[f(Z), Z_0]$ وهو ما سنقوم بدراسته كالآتي :-

* Evaluation of Residues :-

* تعتمد طريقة حساب ال residue للدالة $f(Z)$ عند ال singular point "Z_0" على نوع ال singular point هل هي "removable sing." أو essential sing." أو pole of order "m".

* ولذلك فإنه يجب أولاً معرفة نوع ال singular point "Z_0" للدالة $f(Z)$ (بالطرق السابق ذكرها من قبل) ثم يتم بعد تحديد نوع ال "sing. point" حساب ال residue للدالة $f(Z)$ عند ال sing. point "Z_0" كالآتي :-

(I) If "Z_0" is a "removable singularity":

$\therefore Res\,[f(Z), Z_0] = 0$. ← لأنه لا يوجد معامل لـ $(Z-Z_0)^{-1}$ في هذه الحالة.

(II) If "Z_0" is a pole of order m :

$$\therefore \boxed{Res\,[f(Z), Z_0] = \frac{1}{m-1!}\lim_{Z\to Z_0}\frac{d^{m-1}}{dZ^{m-1}}\left[(Z-Z_0)^m f(Z)\right]}$$

* For simple pole → $m = 1$

$$\boxed{Res\,[f(Z), Z_0] = \lim_{Z\to Z_0}(Z-Z_0)\,f(Z)}$$

III) If "z_0" is an "essential singularity":-

* في هذه الحالة لابد من إيجاد مفكوك "Laurent" للدالة $f(z)$ حول النقطة "z_0" ومنه يكون لنا :-

$$\text{Res}[f(z), 0] = \text{Coefficient of } (z - z_0)^{-1} \text{ in the Laurent expansion} \rightarrow b_1 .$$

Ex 49) Determine the order of the poles for the given functions and find the residue at each pole.

a) $\dfrac{z+1}{z^2 - 2z}$ b) $\dfrac{e^{2z}}{(z-1)^2}$

c) $\dfrac{1 - e^{2z}}{z^4}$ d) $\dfrac{\sh z}{z^2}$

e) $z^n \sin \dfrac{1}{z}$ f) $\dfrac{z^{2n}}{(1+z)^n}$

g) $\dfrac{1}{\sin z}$ h) $\tanh z$.

Solution:-

a) $$f(z) = \frac{z+1}{z^2 - 2z} = \frac{z+1}{z(z-2)}$$

has simple poles at $z = 0$, $z = 2$ الأس المرفوع له القوس

لأن $f(0) = \infty$ ، $f(2) = \infty$, $m = 1$

$$* \ \text{Res}[f(z), 0] = \lim_{z \to 0} \cancel{(z-0)} \frac{(z+1)}{\cancel{z}(z-2)} = -\frac{1}{2}$$

$$* \ \text{Res}[f(z), 2] = \lim_{z \to 2} \cancel{(z-2)} \frac{(z+1)}{z\cancel{(z-2)}} = \frac{3}{2} .$$

(b) $f(z) = \dfrac{e^{2z}}{(z-1)^2}$

has a double pole at $z = 1 \xrightarrow{\text{لأن}} f(1) = \infty$

$\quad$ & $m = 2$ له الأس المرفوع له المقام

$$* \ \operatorname{Res}[f(z), 1] = \frac{1}{1!} \lim_{z \to 1} \frac{d}{dz} \cancel{(z-1)^2} \frac{e^{2z}}{\cancel{(z-1)^2}}$$

$$= \lim_{z \to 1} 2e^{2z} = 2e^2.$$

(c) $f(z) = \dfrac{1 - e^{2z}}{z^4}$

has sing. point at $z = 0$

حل آخر: at $z = 0 \rightarrow l = 4,\ k = 1$

$\rightarrow m = l - k = 3 \rightarrow$ pole of order $\underline{3}$

$$\therefore \operatorname{Res}[f(z), 0] = \frac{1}{2!} \lim_{z \to 0} \frac{d^2}{dz^2} z^3 \left(\frac{1 - e^{2z}}{z^4}\right) = -\frac{4}{3}$$

$$\rightarrow \because e^{2z} = 1 + 2z + \frac{(2z)^2}{2!} + \frac{(2z)^3}{3!} + \cdots \rightarrow \text{Maclaurin}$$ مفكوك

حول النقطة $z = 0$

(المطلوب معرفة نوعها)

$$\therefore f(z) = \frac{1}{z^4}(1 - e^{2z})$$

$$= \frac{1}{z^4}\left[1 - \left(1 + 2z + \frac{4z^2}{2!} + \frac{8z^3}{3!} + \frac{16z^4}{4!} + \cdots\right)\right]$$

$$= -\frac{2}{z^3} - \frac{2}{z^2} - \frac{4}{3z} - \frac{16}{4!} - \frac{32}{5!}z - \frac{64}{6!}z^2 - \cdots$$

وحيث أن ال principal part المكونة السالب يحتوي على عدد محدود من الحدود

$$\rightarrow -\frac{2}{z^3} - \frac{2}{z^2} - \frac{4}{3z}.$$

فإن $f(z)$ has a pole of order $\underline{\underline{3}}$ at $z = 0$.

& $\operatorname{Res}[f(z), 0] = \text{Coeff. of } z^{-1} = -\dfrac{4}{3}.$

(d) $f(z) = \dfrac{\sinh z}{z^2}$

has sing. point at $z = 0$

حل آخر: at $z = 0 \to l = 2, \; K = 1$
$\to m = l - K = 1 \to$ simple pole

$\therefore \text{Res}[f(z), 0] = \lim\limits_{z \to 0} z \dfrac{\sinh z}{z^2} = 1 \to$ بعد استخدام قاعدة لوبيتال

$\to \therefore \sinh z = z + \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} + \cdots \to$ Maclaurin مفكوك
حول $z=0$ (النقطة المطلوب عندها فعلاً)

$$\therefore f(z) = \frac{\sinh z}{z^2}$$

$$= \frac{1}{z^2}\left[z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{z} + \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} + \cdots$$

وحيث أن الـ principal part للمفكوك السابق يحتوي على حد واحد ...

$\to \dfrac{1}{z}$

$\therefore f(z)$ has a simple pole (pole of order "1") at $z = 0$

$\therefore \text{Res}[f(z), 0] = \text{Coeff. of } z^{-1} = 1.$

$\to b_1$

(e) $f(z) = z^n \sin \dfrac{1}{z}$

has a singular point at $z = 0$.

* لمعرفة نوع تلك النقطة لازم نعمل الآتي :-

$\sin \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{3!\, z^3} + \dfrac{1}{5!\, z^5} - \cdots \to$ Maclaurin مفكوك
حول $z=0$ (النقطة المراد عندها فعلاً)

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{z^{2m+1}(2m+1)!}$$

$\therefore f(z) = z^{n} \sin \frac{1}{z}$

$$= z^{n} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m} \frac{1}{z^{2m+1}\,(2m+1)!}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m} \frac{1}{z^{2m-n+1}\,(2m+1)!} \qquad (1)$$

وحيث أن الـ n ← رقم محدود فإنه يوجد عدد لانهائي من الحدود ذات أسس سالبة بالنسبة لـ z وبالتالي فإنه وضع $z=0$ في تلك الحدود يجعلها $=\infty$ وبالتالي فإنه

$f(z)$ has an essential sing. at $z=0$.

* ولإيجاد $Res[f(z),0]$ فإنه نوجد معامل z^{-1} في المفكوك (1) وذلك كالآتي :-

• لإيجاد معامل $\frac{1}{z}$ فإنه هذا يحدث عندما يكون :

$2m - n + 1 = 1 \rightarrow \therefore 2m - n = 0$

$\rightarrow \therefore m = \frac{n}{2}$

وهذا يعني أنه لكي يكون هذا المعامل موجود فإن n لابد أن تكون زوجية ← even (وذلك لأن m تكون عدد صحيح)

$$\therefore Res[f(z),0] = b_1 = (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{(n+1)!}$$

→ if "n" is even.

* إذا كانت الـ "n" فردية ← odd فإنه في هذه الحالة لم يوجد معامل لـ z^{-1} في المفكوك السابق وبالتالي فإن

$Res[f(z),0] = 0$ → if n is odd

(f) $f(z) = \dfrac{z^{2n}}{(1+z)^{n}}$

has a pole of order "n" at $z = -1$ $\xrightarrow{\text{لأن}}$ $f(-1) = \infty$

$\therefore m = n$.

لأن الأس المرفوع له المقوس

$$* \operatorname{Res}[f(z), -1] = \frac{1}{n-1} \lim_{z \to -1} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \cancel{(z+1)^{n}} \frac{z^{2n}}{\cancel{(z+1)^{n}}}$$

$$= \frac{1}{(n-1)} \lim_{z \to -1} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} z^{2n}$$

$$= \frac{1}{(n-1)} \lim_{z \to -1} (2n)(2n-1)(2n-2)\cdots(n+2)\, z^{2n-(n-1)}$$

$$= \frac{1}{(n-1)} \lim_{z \to -1} (2n)(2n-1)(2n-2)\cdots(n+2)\, z^{n+1}$$

$$= \frac{1}{(n-1)} \left[2n(2n-1)(2n-2)\cdots(n+2)\right](-1)^{n+1}$$

(g) $F(z) = \dfrac{1}{\sin z}$

has sing. points at $z = n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$\rightarrow \ell = 1$, $k = 0 \rightarrow m = \ell - k = 1$

$\therefore F(z)$ has a simple poles at $z = n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2,$

$$* \operatorname{Res}[F(z), n\pi] = \lim_{z \to n\pi} (z - n\pi) \frac{1}{\sin z} \rightarrow \text{تطبيق قاعدة لوبيتال}$$

simple poles

$$= \lim_{z \to n\pi} \frac{1}{\cos z} = (-1)^{n}$$

$, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

h) $F(z) = \tanh z = \dfrac{sh\, z}{ch\, z}$

has singular points at $ch\, z = 0$

$\rightarrow \therefore ch\, z = \cos iz$

$\rightarrow \therefore \cos iz = 0$

$\rightarrow \therefore iz = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$

$\rightarrow \therefore z_0 = i(2n+1)\dfrac{\pi}{2}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$sh\, z_0 \neq 0$

$l = 1, \quad K = 0$

$\rightarrow m = l - K = 1$

رتبة

simple poles

وبالتالى نلاحظ يوجد عدد لانهائى من ال singular points كل منها عبارة عن simple pole .

$$* \therefore Res\left[F(z), z_0\right] = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)\frac{sh\, z}{ch\, z} \longrightarrow$$

بتطبيق قاعدة لوبيتال

$z_0 = i(2n+1)\dfrac{\pi}{2}$

$$= \lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0)\, ch\, z + sh\, z\,(1)}{sh\, z}$$

$$= 1 \longrightarrow **$$

لاحظ أن قيمة ال residues عند جميع ال $z_0 = i(2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ تكون ثابتة فى هذه الحالة وتساوى "1" (لانها لا تعتمد على z)

Ex (50) Evaluate the residue of :

(a) $\dfrac{\operatorname{cosec} z}{z}$ (b) $\dfrac{1+z}{1-\cos z}$

at the origin.

Solution :- (a) $F(z) = \dfrac{\operatorname{cosec} z}{z} = \dfrac{1}{z \sin z} \leftarrow \dfrac{P(z)}{Q(z)}$

* لمعرفة نوع ال sing. point عند $z_0 = 0$ نتبع الآتى :-
النقطة المطلوب إيجاد res. عندها

$\because P(z_0) = 1 \neq 0 \rightarrow \therefore k = 0.$

$$\ell \quad \frac{d}{dz}\left[z \sin z\right]_{z=0} = \left[z \cos z + \sin z\right]_{z=0} = 0$$

$$\frac{d^2}{dz^2}\left[z \sin z\right]_{z=0} = \left[-z \sin z + 2\cos z\right]_{z=0} = 2 \neq 0$$

$\rightarrow \therefore \ell = 2. \rightarrow \therefore m = \ell - k = 2$

$\therefore F(z)$ has a double pole at $z = 0$

$$* \therefore \operatorname{Res}[F(z), 0] = \frac{1}{1!} \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz}\left[\cancel{z^2} \frac{1}{\cancel{z} \sin z}\right]$$

double pole

$$= \lim_{z \to 0}\left[\frac{\sin z - z \cos z}{\sin^2 z}\right] \rightarrow \frac{0}{0}$$

تطبيق قاعدة لوبيتال

$$= \lim_{z \to 0}\left[\frac{\cancel{\cos z} + z \sin z - \cancel{\cos z}}{2 \sin z \cos z}\right]$$

$$= \lim_{z \to 0}\left[\frac{z \cancel{\sin z}}{2 \cancel{\sin z} \cos z}\right]$$

$$= \frac{0}{2} = 0 \Rightarrow **$$

عند النقطة $z=0$ ...

حل آخر :- ويمكن إيجاد مفكوك Laurent للدالة $f(z)$ وذلك بأن نقسم "1" على المفكوك الكامل للمقام $z \sin z$ فيكون معامل z^{-1} هو عبارة عن الـ residue للدالة $f(z)$ عند النقطة $z=0$.

$$z^2 - \frac{z^4}{6} + \frac{z^6}{120} - \cdots \;\Big)\; 1 \;\Big(\; \frac{1}{z^2} + \frac{1}{6} + \cdots$$

$$1 - \frac{z^2}{6} + \frac{z^4}{120} - \cdots$$

$$\frac{z^2}{6} - \frac{z^4}{120} + \cdots$$

$$\frac{z^2}{6} - \frac{z^4}{36}$$

$$\therefore\; f(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{6} + \cdots\cdots$$ ← مفكوك Laurent حول النقطة $z=0$ المطلوب حساب الـ Res عندها

$$\rightarrow \therefore\; \text{Res}\,[f(z), 0] = \text{Coeff. of } (z-0)^{-1}$$

$$= 0 \rightarrow$$ لأنه لا يوجد معامل لـ z^{-1} في المفكوك السابق.

ⓑ
$$F(z) = \frac{1+z}{1-\cos z} \rightarrow \frac{P(z)}{Q(z)}$$

$$\text{at } z_0 = 0 \rightarrow l = 2 \;,\; k = 0$$ لأن $P(z_0) = 1 \neq 0$

$$\rightarrow \therefore\; m = l - k = 2$$

$\therefore$ $F(z)$ has a double pole at $z = 0$.

$$* \quad \text{Res}\,[F(z), 0] = \frac{1}{1!} \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz} \left[z^2 \, \frac{[1+z]}{1-\cos z} \right]$$

double

$$= \lim_{z \to 0} \left[\frac{(1-\cos z)(2z+3z^2) - (z^2+z^3)(\sin z)}{(1-\cos z)^2} \right]$$

بتطبيق قاعدة لوبيتال

$$= 2 \rightarrow **$$

Scanned by CamScanner

حل آخر :- يمكن إيجاد مفكوك $Lourent$ للدالة $f(z)$ حول $z_0 = 0$

(النقطة المراد إيجاد الـ Res للدالة $f(z)$ عندها) كالآتى :-

$(1 - \cos z)$

$$\begin{array}{r|l} & 1 + z \\ \hline \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{24} + \frac{z^6}{720} - \cdots & 1 - \frac{1}{12} z^2 + \frac{z^4}{360} + \cdots \\ \frac{2}{z^2} + \frac{2}{z} \cdots & \\ \hline & z + \frac{1}{12} z^2 - \frac{z^4}{360} + \cdots \end{array}$$

$\therefore f(z) = \frac{2}{z^2} + \frac{2}{z} + \cdots \longrightarrow$ مفكوك $Lourent$ حول النقطة $z = 0$ اللازم لحساب الـ Res عندها .

$\longrightarrow \therefore Res\,[f(z), 0] = \text{Coeff of } (z - 0)^{-1}$ in Lourent's exp.

$= \underline{2} \longrightarrow$ معامل z^{-1} فى المفكوك السابق .

EX 51 Determine the singular points for each of the following functions, name the singularity, and find the residue at each point.

(a) $\sin\left(\frac{z}{z-1}\right)$. (b) $z^3 \cos\left(\frac{1}{z-2}\right)$.

(c) $\frac{\sin 2z}{z+1}$. (d) $\frac{\sqrt{z}}{\sin\sqrt{z}}$.

(e) $\frac{e^z}{z\,ch\,a z}$. (f) $\frac{e^z}{z\,sh\,a z}$.

(g) $\frac{sh\,z}{z^2\,ch\,a z}$. (h) $e^z \sin\left(\frac{1}{z}\right)$.

Solution:– (a) $F(z) = \sin\left(\frac{z}{z-1}\right)$

has a singular point at $z = 1$.

$$* \quad F(z) = \sin\left(\frac{z}{z-1}\right) = \sin\left(\frac{z-1+1}{z-1}\right)$$

$$= \sin\left(1 + \frac{1}{z-1}\right) = \sin(1+u), \quad u = \frac{1}{z-1}.$$

$$\because \sin(1+u) = \sin 1 \cos u + \cos 1 \sin u$$

$$= \sin 1\left[1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \dots\right] + \cos 1\left[u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \dots\right]$$

$$\therefore F(z) = \sin 1\left[1 - \frac{1}{2!(z-1)^2} + \frac{1}{4!(z-1)^4} - \dots\right]$$

$$+ \cos 1\left[\frac{1}{(z-1)} - \frac{1}{3!(z-1)^3} + \dots\right] \longrightarrow \text{Laurent's expansion around } z = 1$$

$\therefore F(z)$ has an essential singularity at $z = 1$.

(وذلك لأن المتوالية السابقة تحتوي على عدد لانهائي من الحدود ذات الأس السالب بالنسبة لـ $(z-1)$).

$$* \quad \text{Res}[F(z), 1] = \text{Coefficient of } (z-1)^{-1} \text{ in Laurent's exp.}$$

$$= \cos 1 \longrightarrow **$$

(b) $F(z) = z^3 \cos\left(\frac{1}{z-2}\right)$

has a singular point at $z = 2$.

$$* \quad F(z) = z^3 \cos\left(\frac{1}{z-2}\right) = \left((z-2)+2\right)^3 \cos\left(\frac{1}{z-2}\right)$$

Let $u = z - 2$

$\therefore (u+2)^3 \cos\left(\frac{1}{u}\right)$

$$= (u^3 + 6u^2 + 12u + 8)\left(1 - \frac{1}{2!\,u^2} + \frac{1}{4!\,u^4} - \cdots\cdots\right)$$

$$\therefore F(z) = \left((z-2)^3 + 6(z-2)^2 + 12(z-2) + 8\right)\left(1 - \frac{1}{2!(z-2)^2} + \frac{1}{4!(z-2)^4} - \cdots\right)$$

→ Laurent's expansion at $z = 2$

$\therefore F(z)$ has an essential singularity at $z = 2$.

(وذلك لأن المتوالية السابقة تحتوي على عدد لا نهائي من الحدود ذات الأس السالبة بالنسبة لـ $(z-2)$)

$\therefore \text{Res}[F(z), 2] =$ Coefficient of $(z-2)^{-1}$ in Laurent's exp.

$$= \frac{1}{4!} - 12\,\frac{1}{2!} = \frac{1}{24} - 6 = -\frac{143}{24} \rightarrow **$$

من ضرب $(z-2)^3$ في $\frac{1}{4!(z-2)^4}$

من ضرب $12(z-2)$ في $\frac{1}{2!(z-2)^2}$

(c) $F(z) = \dfrac{\sin 2z}{z+1}$

has a simple pole at $z = -1$.

$$* \ \text{Res}[F(z), -1] = \lim_{z \to -1} \cancel{(z+1)} \frac{\sin 2z}{\cancel{(z+1)}} = \sin(-2) = -\sin 2 \rightarrow **$$

(d) $F(z) = \dfrac{\sqrt{z}}{\sin\sqrt{z}}$.

has a removable singularity at $z = 0$ and simple poles at $z = n^2\pi^2$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots \rightarrow$ راجع $\boxed{EX\ 35}$ الجزء 8 ص ٨٦

removable singularity

$$* \ \text{Res}\left[F(z), 0\right] = 0 .$$

$$* \ \text{Res}\left[F(z), n^2\pi^2\right] = \lim_{z \to n^2\pi^2} (z - n^2\pi^2)\frac{\sqrt{z}}{\sin\sqrt{z}}$$

simple poles

$$= \sqrt{n^2\pi^2} \lim_{z\to n^2\pi^2} \frac{(z-n^2\pi^2)}{\sin\sqrt{z}} \rightarrow \text{تطبيق قاعدة لوبيتال}$$

$$= n\pi \lim_{z \to n^2\pi^2} \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{z}}\cos\sqrt{z}}$$

$$= n\pi \ \frac{2n\pi}{\underbrace{\cos n\pi}_{(-1)^n}} = (-1)^n(2n^2\pi^2)$$

$$, n = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

(e) $F(z) = \dfrac{e^z}{z\, ch\, az}$

has a simple pole at $z = 0$

and at $ch\, az = 0$, $\because \ ch\, az = \cos i a z$

$$\rightarrow \because \cos iaz = 0$$

$$\therefore \ iaz = (2n+1)\frac{\pi}{2}, \ n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

$$\therefore \ z = i\frac{(2n+1)\pi}{2a} \rightarrow \text{simple poles of } F(z) \text{ also.}$$

simple pole

$$* \ \text{Res}\left[F(z), 0\right] = \lim_{z\to 0} \cancel{(z-0)} \frac{e^z}{\cancel{z}\, ch\, az}$$

$$= \frac{e^{0} \to 1}{\underbrace{ch\, 0}_{1}} = 1 .$$

$$* \ \text{Res}\left[F(z),\ z_0\right] = \lim_{z\to z_0} (z - z_0)\frac{e^{z}}{z\,\text{ch}\,az}$$

$z_0 = i\frac{(2n+1)\pi}{2a}$ simple pole

$$= \frac{e^{z_0}}{z_0} \lim_{z\to z_0} \frac{(z - z_0)}{\text{ch}\,az} \quad \text{"بتطبيق قاعدة هوبتال"}$$

$$= \frac{e^{z_0}}{z_0} \lim_{z\to z_0} \frac{1}{a\,\text{sh}\,az} = \frac{e^{z_0}}{z_0}\,\frac{1}{a\,\text{sh}\,az_0}$$

$$, z_0 = \frac{i(2n+1)\pi}{2a}$$

F) $$F(z) = \frac{e^{z}}{z\,\text{sh}\,az} \rightarrow \frac{P(z)}{Q(z)}$$

* The singular points of $F(z)$ are obtained as follows:

$$\rightarrow z\,\text{sh}\,az = 0$$

$$\therefore z = 0$$

or $\text{sh}\,az = 0$, $\therefore i\,\text{sh}\,az = \sin iaz$

$$\therefore \sin iaz = 0 \rightarrow \therefore iaz = n\pi ,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\therefore z = i\frac{n}{a}\pi ,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

* لمعرفة نوع الـ sing. point عند $z=0$ (لأنها ناتجة من $z=0$ لما وضع $n=0$) فإننا نتبع الآتي :-

$$\because P(0) = e^{0} = 1 \neq 0 \rightarrow \therefore K = 0$$

$$, \frac{d}{dz}\left[z\,\text{sh}\,az\right]_{z=0} = \left[az\,\text{ch}\,az + \text{sh}\,az\right]_{z=0} = 0$$

$$\frac{d^2}{dz^2}\left[z\,\text{sh}\,az\right]_{z=0} = \left[a^2 z\,\text{sh}\,az + 2\,\text{ch}\,az\right]_{z=0} = 2 \neq 0$$

$\rightarrow \therefore \ell = 2 \rightarrow \therefore m = \ell - K = 2 \rightarrow \therefore F(z)$ has a double pole at $z=0$

عدد التفاضلات لما ٢

& For $z_0 = i\frac{n}{a}\pi$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$

$K = 0 \xleftarrow{\text{لأن}} e^{z_0} \neq 0$ & $l = 1 \longrightarrow \therefore\ m = l - K = 1$

$\therefore$ F(z) has simple poles at $z = i\frac{n}{a}\pi$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$

$$* \operatorname{Res}\left[F(z), \underset{\text{double pole}}{0}\right] = \frac{1}{1!}\lim_{z \to 0} \frac{d}{dz}\left[z^2 \frac{e^z}{z\, sh\, az}\right].$$

$$= \lim_{z \to 0}\left[\frac{sh\,az\,(ze^z + e^z) - a z e^z\, ch\,az}{sh^2 az}\right] \rightarrow \frac{0}{0}$$

بتطبيق قاعدة هوبتال

$$= \lim_{z \to 0} \frac{sh\,az\,(ze^z + 2e^z) + a\,ch\,az\,(ze^z + e^z) - a\left[a z e^z\, sh\,az + ch\,az\,(ze^z + e^z)\right]}{2a\, sh\,az\, ch\,az}$$

$$= \lim_{z \to 0} \frac{\cancel{sh\,az}\,(ze^z + 2e^z) - a^2 z e^z\, \cancel{sh\,az}}{2a\,\cancel{sh\,az}\, ch\,az} = \frac{0 + 2 - 0}{2a} = \frac{1}{a}.$$

$$* \operatorname{Res}\left[F(z), z_0\right] = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)\frac{e^z}{z\, sh\,az}$$

$i\frac{n}{a}\pi \leftarrow$ simple pole

$$= \frac{e^{z_0}}{z_0} \lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0)}{sh\,az}$$

بتطبيق قاعدة هوبتال

$$= \frac{e^{z_0}}{z_0} \lim_{z \to z_0} \frac{1}{a\, ch\,az}$$

$$= \frac{e^{z_0}}{z_0} \frac{1}{a\, ch\,a z_0} \quad , \quad z_0 = i\frac{n}{a}\pi$$

$$= \frac{e^{i\frac{n}{a}\pi}}{(i\frac{n}{\cancel{a}}\pi)} \frac{1}{\cancel{a}\, \underbrace{ch\, i n\pi}_{\cos n\pi \,\to\, (-1)^n}} = \frac{(-1)^n e^{i\frac{n}{a}\pi}}{i n\pi} \quad , n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$F(z) = \frac{sh\, z}{z^2\, ch\, az}$$

has singular points at $ch\, az = 0$

$$\therefore \cos iaz = 0$$

$$\therefore iaz = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore z = -i\frac{(2n+1)}{a}\frac{\pi}{2}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \rightarrow \text{simple poles}$$

لأنه

$$l = 1,\ k = 0 \rightarrow \therefore m = 1$$

and at $z = 0$

وحيث أن $F(0) = \frac{0}{0}$ فإنه لمعرفة نوع الـ singular point للدالة $F(z)$ عند النقطة $z = 0$ فإننا نتبع الآتي :-

$$\frac{d}{dz}\left[sh\, z\right]_{z=0} = ch\, z\Big|_{z=0} = 1 \neq 0 \rightarrow \therefore k = 1$$

$$\frac{d}{dz}\left[z^2\, ch\, az\right]_{z=0} = \left[a z^2\, sh\, az + 2z\, ch\, az\right]_{z=0} = 0$$

$$\frac{d^2}{dz^2}\left[z^2\, ch\, az\right]_{z=0} = \left[a^2 z^2\, ch\, az + 2az\, sh\, az + 2az\, sh\, az + 2\, ch\, az\right]_{z=0}$$

$$= 2 \neq 0 \rightarrow \therefore l = 2$$

عدد التفاضلات ٢

$$\therefore m = l - k = 2 - 1 = 1$$

$\therefore F(z)$ has a simple pole at $z = 0$.

$$* \operatorname{Res}\left[F(z), \underset{\text{simple pole}}{0}\right] = \lim_{z \to 0} \cancel{(z - 0)} \frac{sh\, z}{z^{\cancel{2}}\, ch\, az} \rightarrow$$

تطبيق قاعدة "لوبيتال"

$$= \lim_{z \to 0} \frac{ch\, z}{az\, sh\, az + ch\, az} = \frac{ch\, 0}{ch\, 0} = 1.$$

$$* \operatorname{Res}\left[F(z), \underset{\text{simple pole}}{z_0}\right] = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) \frac{sh\, z}{z^2\, ch\, az}, \quad z_0 = -i\frac{(2n+1)}{a}\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \operatorname{Res}[F(z), z_0] = \frac{\operatorname{sh} z_0}{z_0^2} \lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0)}{\operatorname{ch} a z}$$ → "تطبيق قاعدة هوبتال"

$$= \frac{\operatorname{sh} z_0}{z_0^2} \lim_{z \to z_0} \frac{1}{a \operatorname{sh} a z}$$

$$= \frac{\operatorname{sh} z_0}{z_0^2} \frac{1}{a \operatorname{sh} a z_0}, \quad z_0 = -i (2n+1) \frac{\pi}{2}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

(h) $F(z) = e^{z} \sin\left(\frac{1}{z}\right)$.

has a singular point (essential singularity) at $z = 0$.

* $F(z) = e^{z} \sin\left(\frac{1}{z}\right)$

$$= \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots\right)\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!\, z^3} + \frac{1}{5!\, z^5} - \cdots\right)$$

→ Laurent's expansion around $z = 0$.

* $\operatorname{Res}[F(z), 0]$ = coefficient of $\frac{1}{z}$ in Laurent's exp.

$$= 1 - \frac{1}{2!\,3!} + \frac{1}{4!\,5!} - \frac{1}{6!\,7!} + \cdots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k!\,(2k+1)!} \longrightarrow **$$

EX 52 Find the residue of $\cot^3 z$ at $z = 0$.

Solution:— $\because \cot z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$

$$\because \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots$$

مفكوك $\cos z$ ، $\sin z$ حول النقطة $z=0$ المطلوب حساب الـ residue عندها

* بقسمة مفكوك $\cos z$ على مفكوك $\sin z$ نحصل على مفكوك $\cot z$ وذلك كالآتي :--

$$\begin{array}{r|l}
 & 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \cdots \\
z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \cdots & \\
\hline
\frac{1}{z} - \frac{1}{3} z - \frac{1}{45} z^3 - \cdots & 1 - \frac{z^2}{6} + \frac{z^4}{120} - \cdots \\
 & \overline{-\frac{1}{3} z^2 + \frac{1}{30} z^4 - \cdots} \\
 & -\frac{1}{3} z^2 + \frac{1}{18} z^4 - \cdots \\
 & \overline{-\frac{1}{45} z^4 - \cdots}
\end{array}$$

$$\therefore \cot z = \frac{1}{z} - \frac{1}{3} z - \frac{1}{45} z^3 - \cdots$$

بإجراء التفاضل لطرفي المعادلة السابقة ينتج أن :

$$-\operatorname{cosec}^2 z = -\frac{1}{z^2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{15} z^2 - \cdots$$

$$\therefore \operatorname{cosec}^2 z = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{15} z^2 + \cdots$$

$$\therefore \cot^2 z = \operatorname{cosec}^2 z - 1 = \frac{1}{z^2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{15} z^2 + \cdots$$

Scanned by CamScanner

$$\cos 2z = 1 - \frac{(2z)^2}{2!} + \frac{(2z)^4}{4!} - \dots$$

ملحوظة :- يمكن إيجاد مفكوك $\cot^2 z$ بطريقة أخرى كالآتي :-

$$\cot^2 z = \frac{\cos^2 z}{\sin^2 z} = \frac{\frac{1}{2}(1+\cos 2z)}{\frac{1}{2}(1-\cos 2z)} = \frac{1+\cos 2z}{1-\cos 2z}$$

$$= \frac{2 - \frac{(2z)^2}{2!} + \frac{(2z)^4}{4!} - \dots}{\frac{(2z)^2}{2!} - \frac{(2z)^4}{4!} + \dots}$$

ثم بإجراء القسمة التركيبية يمكن الحصول على مفكوك $\cot^2 z$.

$$* \cot^3 z = \cot z \cot^2 z = \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3}z - \frac{1}{45}z^3 \dots\right)\left(\frac{1}{z^2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{15}z^2 + \dots\right)$$

$\longrightarrow$ Laurent's exp around $z = 0$

$\therefore \operatorname{Res}[F(z), 0]$ = Coefficient of z^{-1} in Laurent's exp.

$$= -\frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -1 \longrightarrow **$$

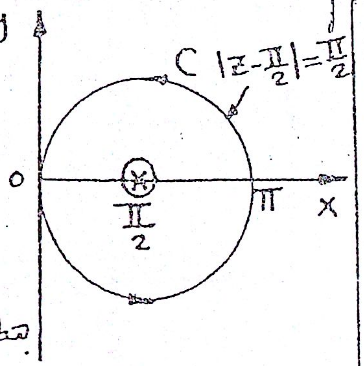
EX 52 Evaluate (a) $\displaystyle\oint_{|z-\frac{\pi}{2}|=\frac{\pi}{2}} \frac{z}{\cos z}\, dz$

(b) $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{e^{-z}}{(z-1)^2}\, dz$ (c) $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{1+z}{(e^z - 1)}\, dz$.

Solution :- (a) $F(z) = \dfrac{z}{\cos z}$

has singular points at $\cos z = 0$

$$\rightarrow z = (2n+1)\frac{\pi}{2}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$



at $n = 0 \rightarrow z = \frac{\pi}{2} \rightarrow$ simple pole
which lies inside the circle $|z - \frac{\pi}{2}| = \frac{\pi}{2}$.

$$* \operatorname{Res}\left[F(z), \frac{\pi}{2}\right] = \lim_{z \to \frac{\pi}{2}} \left(z - \frac{\pi}{2}\right) \frac{z}{\cos z}$$

simple pole

$F(z)$

تطبيق قاعدة هوبتال

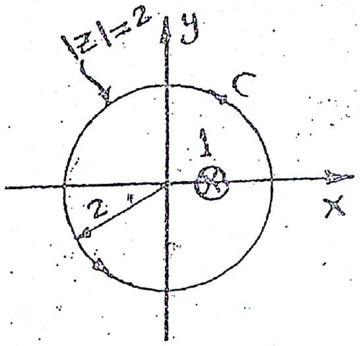
$$= \lim_{z \to \frac{\pi}{2}} \frac{2z - \frac{\pi}{2}}{-\sin z} = \frac{2\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}}{\underbrace{-\sin\frac{\pi}{2}}_{1}} = -\frac{\pi}{2}.$$

$$\therefore \oint_{|z-\frac{\pi}{2}|=\frac{\pi}{2}} \frac{z}{\cos z} = 2\pi i \, \text{Res}\left[F(z), \frac{\pi}{2}\right]$$

$$= 2\pi i \left[-\frac{\pi}{2}\right] = -\pi^2 i \longrightarrow **$$

(b) $$F(z) = \frac{e^{-z}}{(z-1)^2}$$

has a pole of order "2" (a double pole) at $z = 1$



لأن $\longrightarrow$ $F(1) = \infty$

الأس المرفوع لمقدار القوس $(z-1)$ $\leftarrow$ $m = 2$.

$$\longrightarrow \therefore \text{Res}[F(z), 1] = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \to 1} \frac{d}{dz} \cancel{(z-1)^2} \frac{e^{-z}}{\cancel{(z-1)^2}}$$

$$= \lim_{z \to 1} \frac{d}{dz} e^{-z} = \lim_{z \to 1} -e^{-z} = -e^{-1}.$$

$$\longrightarrow \therefore \oint_{|z|=2} \frac{e^{-z}}{(z-1)^2} dz = 2\pi i \, \text{Res}[F(z), 1]$$

$$= 2\pi i (-e^{-1}) = -2\pi i e^{-1} \longrightarrow **$$

النقطة المراد إيجاد Res للدالة $F(z)$ عندها

حل آخر :- يمكن إيجاد مفكوك Laurent للدالة $F(z)$ حول $z_0 = 1$ كالآتي :-

$$F(z) = \frac{e^{-z}}{(z-1)^2} = \frac{e^{-(z-1+1)}}{(z-1)^2}$$

$$= \frac{e^{-1} e^{-(z-1)}}{(z-1)^2}$$

$$= \frac{e^{-1}}{(z-1)^2}\left[1 - (z-1) + \frac{1}{2!}(z-1)^2 - \frac{1}{3!}(z-1)^3 + \cdots\right]$$

$$= e^{-1}\left[\frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{(z-1)} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}(z-1) + \cdots\right]$$

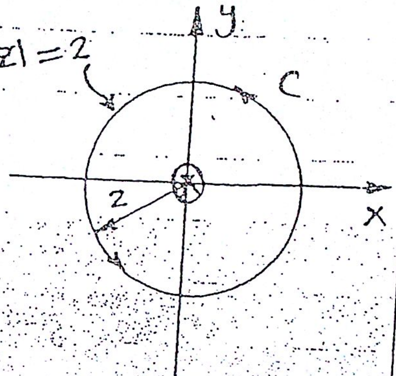
$\therefore$ Coefficient of $\dfrac{1}{(z-1)}$ in Laurent's expansion $\rightarrow b_1 = -e^{-1}$

$$\rightarrow \therefore \oint_{|z|=2} \frac{e^{-z}}{(z-1)^2}\, dz = 2\pi i b_1 = 2\pi i(-e^{-1}) = -2\pi i e^{-1}$$ → وهي نفس النتيجة السابق الحصول عليها من قبل

(C) $F(z) = \dfrac{1+z}{(e^z-1)} \rightarrow \dfrac{P(z)}{Q(z)}$

has singular points at $e^z - 1 = 0 \rightarrow \therefore e^z = 1 = e^{i(0+2n\pi)}$

$\rightarrow \therefore z = 2n\pi i\ ,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$



* At $n = 0 \rightarrow z = 0$

which lies only inside the circle $|z| = 2$

وهي عبارة عن "simple pole" وذلك لأن:-

$K = 0 \xrightarrow{\text{لأن}} P(0) = 1 \neq 0$

$, \ \ell = 1$

$\therefore m = \ell - K = 1$

$\therefore F(z)$ has a simple pole (pole of order "1") at $z = 0$

$$* \ \text{Res}[F(z), 0] = \lim_{z\to 0} (z-0)\frac{1+z}{e^z-1}$$

$$= (1+0)\lim_{z\to 0}\frac{z}{e^z-1}$$ → بتطبيق قاعدة هوبتال

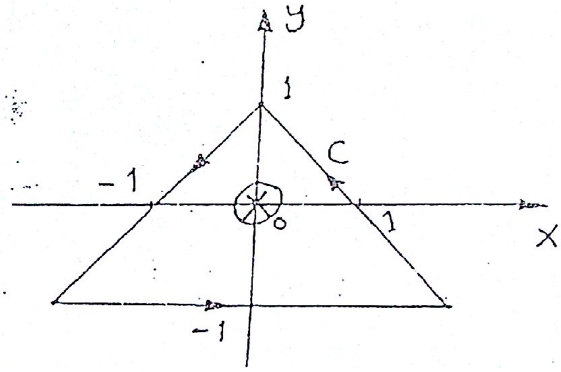
$$= \lim_{z\to 0}\frac{1}{e^z} = \frac{1}{e^0} = 1.$$

$$* \therefore \oint_{|z|=2} \frac{(1+z)}{(e^z-1)}\, dz = 2\pi i \ \text{Res}[F(z), 0]$$

$$= 2\pi i(1) = 2\pi i \rightarrow **$$

EX 54 Evaluate the integral $\oint_C \frac{z^2 - sh\, z^2}{z^6}\, dz$ where "C" is the closed path shown in the Fig.

Solution :-



$*\quad F(z) = \frac{z^2 - sh\, z^2}{z^6}$

$\because\ z = 0$ lies inside C

$\therefore\ F(0) = \frac{0}{0}$

فإنه لمعرفة نوع ال singularity عند $z=0$
فإننا نوجد مفكوك الدالة $F(z)$ حول $z=0$
وذلك كالآتي :-

$\because\ sh\, z^2 = z^2 + \frac{(z^2)^3}{3!} + \frac{(z^2)^5}{5!} + \cdots$

$\therefore\ F(z) = \frac{z^2 - sh\, z^2}{z^6}$

$= -\left[\frac{1}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \cdots\cdots\right]$

$\therefore$ F(z) has a "removable singularity" at $z = 0$

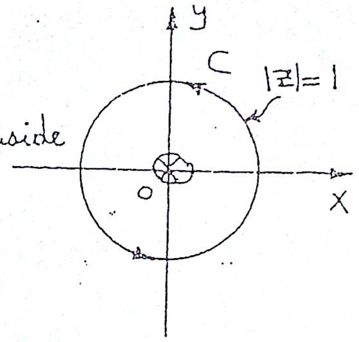
$\therefore\ Res\,[F(z), 0] = 0$.

$\therefore\ \oint_C \frac{z^2 - sh\, z^2}{z^6}\, dz = 0 \Rightarrow **$

EX 55 Evaluate (a) $\oint_{|z|=1} (z+1)\, e^{\frac{1}{z}}\, dz$

(b) $\oint_{|z|=2} z\, e^{\frac{1}{z-1}}\, dz$.

Solution :-- (a) $f(z) = (z+1)\, e^{\frac{1}{z}}$



singularity is at $z = 0$ ($\xrightarrow{\text{لأن}} f(0) = \infty$) which lie's inside the circle $|z| = 1$.

$$* \quad f(z) = (z+1)\, e^{\frac{1}{z}}$$

$$= (z+1)\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \cdots\cdots\right]$$

$$= z + 2 + \frac{3}{2}\frac{1}{z} + \cdots\cdots \longrightarrow$$ فنكوك Laurent حول $z = 0$

$\longrightarrow \therefore f(z)$ has an essential singularity at $z = 0$.

(وذلك لأن المتوالية السابقة تحتوى على عدد لانهائى من الحدود ذات الأسس السالبة بالنسبة لـ z $\searrow (z - 0)$ (وبالتالى بادى وضع $z = 0$ $\swarrow z_0$ فى هذه الحدود يجعل كل منهم يساوى "∞"))

$\longrightarrow \therefore \operatorname{Res}[f(z), 0] =$ coefficient of z^{-1} in Laurent's exponsion $\longrightarrow b_1$

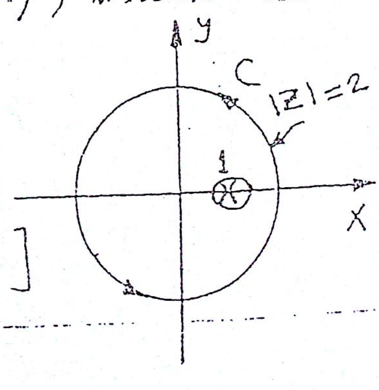
$$= \frac{3}{2}$$

$$\longrightarrow \therefore \oint_{|z|=1} (z+1)\, e^{\frac{1}{z}}\, dz = 2\pi i\, b_1 = 2\pi i \left(\frac{3}{2}\right)$$

$$= 3\pi i \longrightarrow **$$

(b) $f(z) = z\, e^{\frac{1}{z-1}}$

singularity is at $z = 1$ ($\xrightarrow{\text{لأن}} f(1) = \infty$), which lies inside the circle $|z| = 2$.



$$* \quad f(z) = z\, e^{\frac{1}{z-1}}$$

$$= z\left[1 + \frac{1}{(z-1)} + \frac{1}{2!}\frac{1}{(z-1)^2} + \cdots\cdots\right]$$

$$\therefore F(Z) = ((Z-1)+1)\left[1 + \frac{1}{(Z-1)} + \frac{1}{2!}\frac{1}{(Z-1)^2} + \cdots\right]$$

$$= \left[(Z-1) + 2 + \frac{3}{2}(Z-1)^{-1} + \cdots\right]$$

$\longrightarrow Z = 1$ تكون Lourent حول

$\therefore F(Z)$ has an essential sing. at $Z = 1$

(وذلك لأن المتوالية السابقة تحتوى على عدد لانهائي من الحدود ذات الأسس السالبة بالنسبة لـ "Z")

$\longrightarrow \therefore \text{Res}[F(Z), 1] =$ Coefficient of $(Z-1)^{-1}$ in Lourent exponsion $\longrightarrow b_1$

$$= \frac{3}{2}$$

$$\longrightarrow \therefore \oint_{|Z|=2} Z e^{\frac{1}{Z-1}}\, dZ = 2\pi i \,\text{Res}[F(Z), 1]$$

$$= 2\pi i \left(\frac{3}{2}\right) = 3\pi i \longrightarrow **$$

* Cauchy's Residue theorem :-

* Let $F(Z)$ is analytic within and on a closed curve "C" except at a number of isoloted singularities $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$, then

$$\boxed{\oint_C F(Z)\, dZ = 2\pi i \sum_{J=1}^{n} \text{Res}[F(Z), Z_J]} \longrightarrow **$$

* النظرية السابقة تعنى أنه لو كانت الدالة $F(Z)$ analytic فى المنطقة المحصورة بالمنحنى المغلق "C" ماعدا عند بعض الـ singular points $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ الموجودة داخل المنحنى المغلق "C" فإنه يمكن حساب التكامل $\oint_C F(Z)\, dZ$